10 класс

1. Последовательность задана рекуррентным способом: $a_1{=}1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Найдите сумму 1730 первых членов этой последовательности.

   Решение. Найдем несколько первых членов последовательности: $a_3 = a_2/a_1 = 2/1 = 2$; $a_4 = a_3/a_2 = 2/2 = 1$; $a_5 = a_4/a_3 = 0,5$; $a_6 = a_5/a_4 = 0,5/1 = 0,5$; $a_7 = a_6/a_5 = 0,5/0,5 = 1$ и $a_8 = a_7/a_6 = 1/0,5 = 2$. Заметим, что последовательность оказалась периодической, её шесть первых членов 1; 2; 2; 1; 0,5; 0,5 будут бесконечно повторяться. Поскольку последовательность периодическая, с периодом шесть, а $1728 : 6 = 288$ и $a_1{+}a_2{+}\ldots{+}a_6 = 7$, то $\sum\limits_{i=1}^{1730} a_i = \sum\limits_{i=1}^{1728} a_i{+}a_{1729}{+}a_{1730} = 288{\cdot}7{+}1{+}2 = 2019$.

   Ответ: 2019.

2. Можно ли число 2020 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

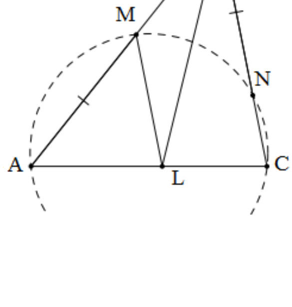
   Решение. У каждого слагаемого одна и та же сумма цифр, поэтому их остатки от деления на 3 одинаковы (сумма цифр числа дает тот же остаток от деления на 3 (и на 9), что и само число). Сумма 99 одинаковых остатков делится на 3, значит, и сумма любых 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр делится на 3. Но число 2020 на 3 не делится. **Ответ: нет.**

   Комментарий. Аналогично можно рассуждать об остатках от деления на 9.

3. Книга сшита из 12 одинаковых тетрадей. Каждая тетрадь состоит из нескольких двойных листов, вложенных друг в друга. Тетради книги сшиты последовательно друг за другом. Все страницы книги пронумерованы, начиная с 1. Сумма номеров четырех страниц одного из двойных листов четвертой тетради равна 338. Сколько страниц в этой книге?

   Решение. Пусть в книге x страниц, следовательно, в каждой тетради $\dfrac{x}{12}$ страниц, в первых трех тетрадях $\dfrac{3x}{12} = \dfrac{x}{4}$ страниц, в первых четырех тетрадях $\dfrac{4x}{12} = \dfrac{x}{3}$ страниц. Номера первой и второй страницы четвёртой тетради будут $\dfrac{x}{4} + 1$ и $\dfrac{x}{4} + 2$, а предпоследней и последней страницы $\dfrac{x}{3} - 1$ и $\dfrac{x}{3}$. Так как суммы номеров всех двойных листов для каждой из тетрадей одинаковы, то получим уравнение $\left(\dfrac{x}{4} + 1\right) + \left(\dfrac{x}{4} + 2\right) + \left(\dfrac{x}{3} - 1\right) + \dfrac{x}{3} = 338$, поэтому $x = 288$. **Ответ: 288.**

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $AM = BN$ и четырехугольник $AMNC$ – вписанный. Пусть BL – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что прямые ML и BC параллельны.



Решение. Из того, что точки A, M, N и C лежат на одной окружности, следует, что $BM \cdot BA = BN \cdot BC$, или $AB : BC = BN : BM$. Из того, что BL – биссектриса треугольника ABC, следует, что $AL : LC = AB : BC$. Тогда $AL : LC = AB : BC = BN : BM = AM : MB$, то есть $AL : LC = AM : MB$, откуда по теореме, обратной теореме Фалеса, получаем, что $ML \parallel BC$, что и требовалось доказать.

Комментарий 1. Теорема, обратная теореме Фалеса, ошибочно названа участником олимпиады теоремой Фалеса – баллы не снимать.

Комментарий 2. Ссылка на теорему, обратную теореме Фалеса, может быть заменена доказательством подобия треугольников AML и ABC.

5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + xy + y^2 = x + 20.$$

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно переменной x: $x^2+(y-1)x+(y^2-20) = 0$. Его дискриминант $D = (y-1)^2-4(y^2-20) = 81-2y-3y^2$ должен быть неотрицательным, то есть $3y^2+2y-81 \leqslant 0$. Это неравенство выполняется при $y \in \left[\dfrac{-1-2\sqrt{61}}{3}; \dfrac{-1+2\sqrt{61}}{3}\right]$. В этом промежутке десять целых y от -5 до 4. Поскольку нужно найти пары целых чисел, то дискриминант D должен быть полным квадратом. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это будет при $y = -5; 0; 4$.

- 1) Если $y = -5$, то $D = 16$ и получим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$, имеющее целые корни 1 и 5, и значит, найдены две пары целых чисел $(1; -5)$ и $(5; -5)$.
- 2) Если $y = 0$, то $D = 81$ и получим уравнение $x^2 - x - 20 = 0$, имеющее целые корни -4 и 5, и значит, найдены две пары целых чисел $(-4; 0)$ и $(5; 0)$.
- 3) Если $y = 4$, то $D = 25$ и получим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, имеющее целые корни -4 и 1, и значит, найдены две пары целых чисел $(-4; 4)$ и $(1; 4)$.

Таким образом, данному уравнению удовлетворяют шесть пар целых чисел: $(1; -5)$, $(5; -5)$, $(-4; 0)$, $(5; 0)$, $(-4; 4)$ и $(1; 4)$. **Ответ:** $(1; -5)$**,** $(5; -5)$**,** $(-4; 0)$**,** $(5; 0)$**,** $(-4; 4)$**,** $(1; 4)$**.**

Комментарий. Графиком уравнения $x^2 + xy + y^2 = x + 20$ является эллипс, изображенный ниже. На рисунке видно, что эллипс проходит через шесть точек с вышеуказанными целыми координатами.