9 класс

1. Числа p и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 2020ax + c = 0$, $a \neq 0$. Найдите сумму корней квадратных уравнений $ax^2 + bx + d = 0$ и $ax^2 + px + q = 0$, если каждое из них имеет 2 различных действительных корня.

   Решение. Так как p и b – корни квадратного уравнения $x^2 + 2020ax + c = 0$, то по теореме Виета $p + b = -2020a$. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + d = 0$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $ax^2 + px + q = 0$, тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_3 + x_4 = -\frac{p}{a}$. Итак, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} - \frac{p}{a} = -\frac{b+p}{a} = -\frac{-2020a}{a} = 2020$.
   Ответ: 2020.

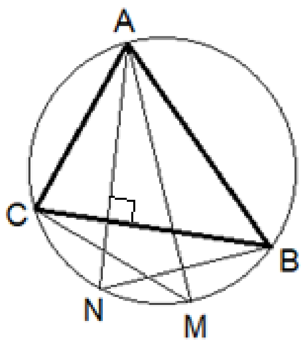
   Комментарий. Утверждение теоремы Виета участник олимпиады ошибочно называет теоремой обратной теореме Виета – баллы не снимать.

2. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 12 различных натуральных делителей, наибольший простой делитель которого есть число 101, а последняя цифра – нуль.

   Решение. Пусть n – искомое число. По условию $n \vdots 101$, $n \vdots 2$, $n \vdots 5$. Рассмотрим число $m = 2 \cdot 5 \cdot 101$, заметим что оно имеет ровно 8 различных натуральных делителей (1, 2, 5, 101, $2 \cdot 5$, …, $2 \cdot 5 \cdot 101$), значит $n > m$. Поскольку n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию задачи, то далее рассмотрим число $2 \cdot m = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, полученное из m умножением на наименьшее из простых чисел. Заметим, что число $2m = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ имеет ровно 12 различных натуральных делителей (1, 2, 4, 5, 101, $2 \cdot 5$, …, $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$), а значит $n = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$. **Ответ: 2020.**

   Комментарий. В решении может использоваться известная функция $\tau(n)$ – количество натуральных делителей числа n, причем если каноническое разложение на простые множители числа n имеет вид $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Если участник олимпиады использует последнюю формулу без доказательства, то баллы не снимаются.

3. Треугольник ABC вписан в окружность. Точки M и N такие, что отрезок AM является диаметром, а отрезок AN перпендикулярен стороне BC. Докажите, что $BN = CM$.



   Решение 1. Хорды CB и AN перпендикулярны по условию, хорды MN и AN тоже перпендикулярны, потому что треугольник ANM – прямоугольный с гипотенузой AM. Таким образом, имеем две параллельные хорды CB и MN, между которыми равные дуги CN и BM. Поэтому хорды BN и CM стягивают равные дуги, и длины их равны.

Решение 2. Пусть $\angle CAN = \alpha$. Так как $CB \perp AN$, то $\angle ACB = 90° - \alpha$. Так как углы ACB и ANB опираются на одну дугу, то $\angle ACB = \angle ANB = 90° - \alpha$. Поскольку AM – диаметр, то $\angle ANM = 90°$, но тогда $\angle BNM = 90° - \angle ANB = \alpha$. Заметим, что $\angle BNM = \angle BAM = \alpha$. Итак, $\angle CAM = \angle BAN = \alpha + \angle MAN$, а равные вписанные углы опираются на равные хорды, то есть $CM = BN$.

4. На свой день рождения Пятачок испек большой пирог весом 10 кг и пригласил 100 гостей. Среди них был Винни-Пух, неравнодушный к сладостям. Именинник огласил правило деления пирога: первый гость отрезает себе кусок пирога размером 1%, второй гость отрезает себе кусок пирога размером 2% от оставшейся части, третий гость отрезает себе кусок пирога размером 3% от оставшейся части и так далее. Какое место по счету в очереди нужно занять Винни-Пуху, чтобы получить наибольший кусок пирога?

   Решение. Первые в очереди гости получают всё увеличивающиеся куски пирога, потому что остатки пирога на первых этапах деления большие. Но поскольку остатки пирога уменьшаются, то наступит момент, когда гости станут получать уменьшающиеся куски пирога. На каком же по счету госте это произойдет?

   Сравним куски пирога, которые получили $(n-1)$-ый и n-ый гости. Пусть масса оставшейся части пирога, когда подошла очередь $(n-1)$-го гостя равна m кг. Тогда $(n-1)$-ый гость получил $\frac{n-1}{100} \cdot m$ кг, и остаток пирога стал равным $m - \frac{n-1}{100} \cdot m$ кг, что после упрощения будет равно $\frac{101-n}{100} \cdot m$ кг. Поэтому n-ый гость получил $\frac{101-n}{100} \cdot m \cdot \frac{n}{100} = \frac{n(101-n)}{10000} \cdot m$ кг. Разность между кусками n-го и $(n-1)$-го гостя равна $\frac{n(101-n)}{10000} \cdot m - \frac{n-1}{100} \cdot m = \frac{-n^2+n+100}{10000} \cdot m$. Эта разность положительна при условии $n^2 - n - 100 < 0$. Решая квадратное неравенство, находим, что наибольшим натуральным решением является $n = 10$. Значит, 10-ый по счету гость получит наибольший кусок пирога, поэтому Винни-Пуху нужно занимать в очереди 10-е место.
   Ответ: 10.

5. На сайте футбольного клуба «Астрахань» проводится опрос, кого из m футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует один раз за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – это доля голосов, отданных за него, в процентах, округленных до целого числа. После того, как проголосовало несколько посетителей, суммарный рейтинг номинантов составил 95%. При каком наименьшем m такое возможно?

   Решение. Пусть a – наибольшая потеря доли процента при округлении для определения рейтинга футболиста. Тогда, согласно правилам округления, $a < 0,5$. Если суммарный рейтинг составил 95%, то суммарная потеря равна 5%, поэтому $0,5m > am \geqslant 5$, значит, $0,5m > 5$ или $m > 10$.

   Покажем, что при $m = 11$ решение имеется. Например, $m = 11$ и проголосовало 73 посетителя, причем 33 из них проголосовали за одного футболиста, а остальные 40 посетителей отдали свои голоса 10 футболистам поровну по 4 голоса. В этом случае суммарный рейтинг равен

   $\frac{33}{73} \cdot 100\% + 10 \cdot \frac{4}{73} \cdot 100 \approx 45\% + 10 \cdot 5\% = 95\%$.

   Значит, минимальное $m = 11$. **Ответ: 11.**