Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

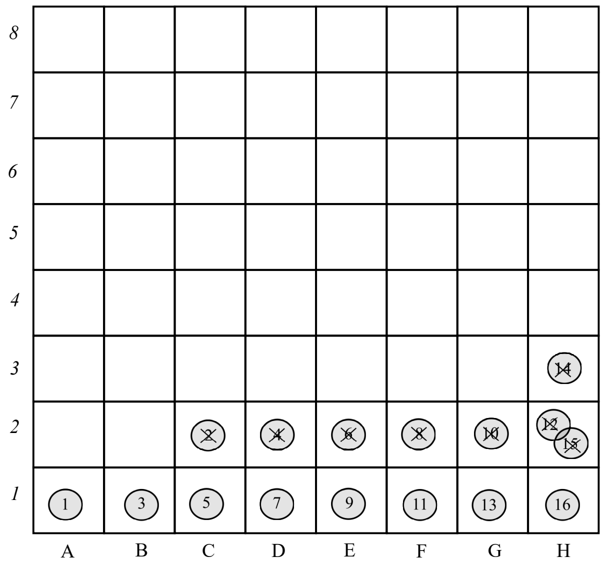
10 класс

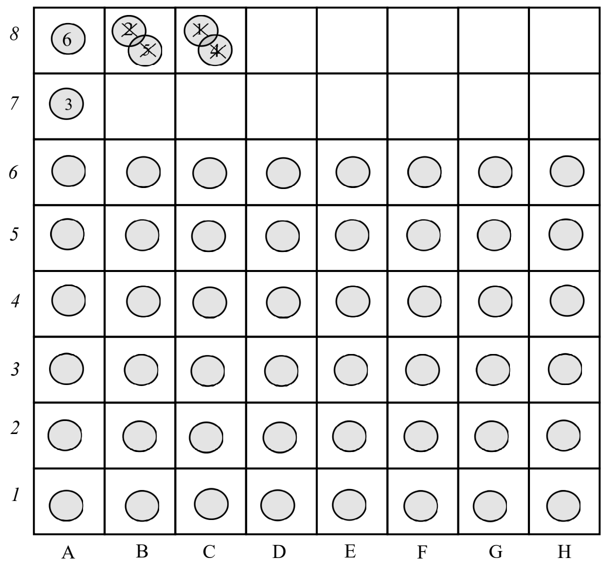
Решения и ответы

1. На шахматную доску 8×8 выкладывают фишки по следующему правилу. Первоначально доска пустая. Ход состоит в том, что на любое свободное поле ставится фишка. Этим же ходом ровно одна из фишек, оказавшихся с ней на соседнем поле, снимается с доски (если имеется такая соседняя фишка). Какое наибольшее количество фишек может расположиться на доске, с учетом указанного правила? Соседними полями считаются ближайшие по горизонтали, вертикали и диагонали.

   Решение.

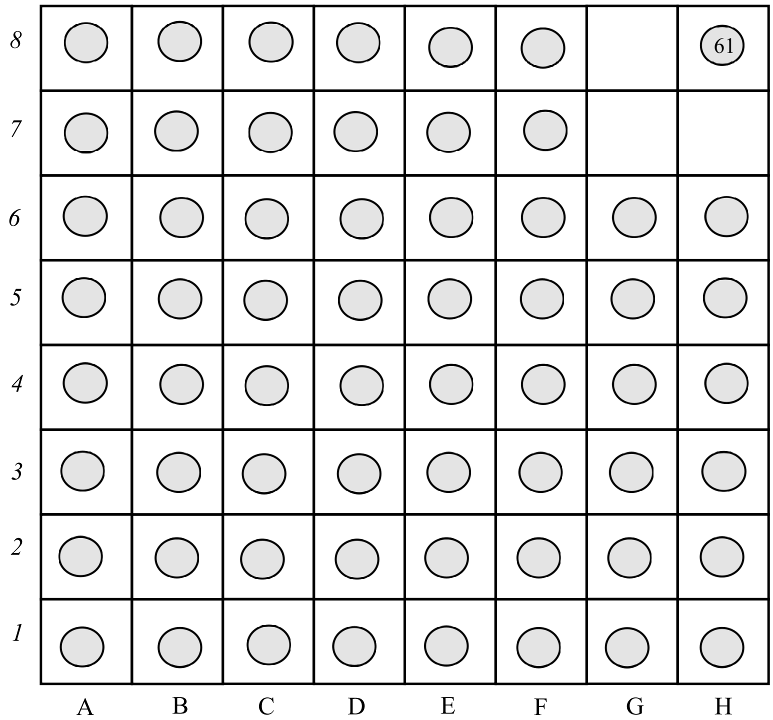
   Увеличить число фишек на доске на одну можно только тогда, когда новая фишка ставится на полностью свободное поле, т.е. на поле, все соседние поля которого свободны от фишек.





Выделим один горизонтальный ряд A1-H1, см. рис. Мы можем заполнить этот ряд фишками слева направо. Для этого будем расставлять фишки по очереди, как показано на рисунке. Номера в кружочках указывают последовательность выставления фишек. Перечеркнутый номер означает снятие фишки при выставлении соседней. При заполнении нижнего ряда каждая следующая фишка снимает с доски предыдущую, поэтому выставление фишки с нечетным номером в линию A1-H1 удаляет фишку с предыдущим четным номером из ряда A2-H2. Чтобы поставить фишку на поле H1, потребуется сначала поставить фишку номер 14 на поле H3, затем финку номер 15 на поле H2, сняв предыдущую. Остается поставить фишку номер 16 на угловое поле H1, сняв фишку номер 15 с доски.

Далее мы можем аналогичным способом заполнить все горизонтальные ряды до A6-H6. Ряды A7-F7 и A8-F8 придется заполнять иначе, так как сверху над ними недостаточно свободных полей. Порядок заполнения двух вертикальных клеток A7 и A8 показан на втором рисунке. Для их заполнения необходимо дважды начать с поля C8. Этим способом мы дойдем до полей F7 и F8. Дальше вправо продвинуться не получится, поскольку нет свободного поля, кроме поля H8. Мы можем поставить фишку на это поле, и, при желании заполнить поле G8, сняв фишку с поля H8. Итак мы показали, как можно заполнить доску 61 фишкой. Существуют другие последовательности расстановок и другие итоговые расстановки 61 фишки.



Остается доказать, что 62 фишки расставить невозможно. Пусть на доске расставлена 61 фишка. Три свободных поля не позволяют выделить из них одно, не имеющее занятых соседних полей. Минимальное число сторон свободного поля, к которым может примыкать другое свободное поле - две, в углу доски. Поэтому минимальное необходимое число свободных соседей - три, с учетом диагонального соседнего поля, см. рисунок.

Ответ. Можно расположить не более 61 фишки.

2. $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трехчлены, у каждого из которых старший коэффициент равен 1. Известно, что трехчлен $h(x) = f(x) + g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x) = g^3(x) + g^2(x)$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.

Решение.

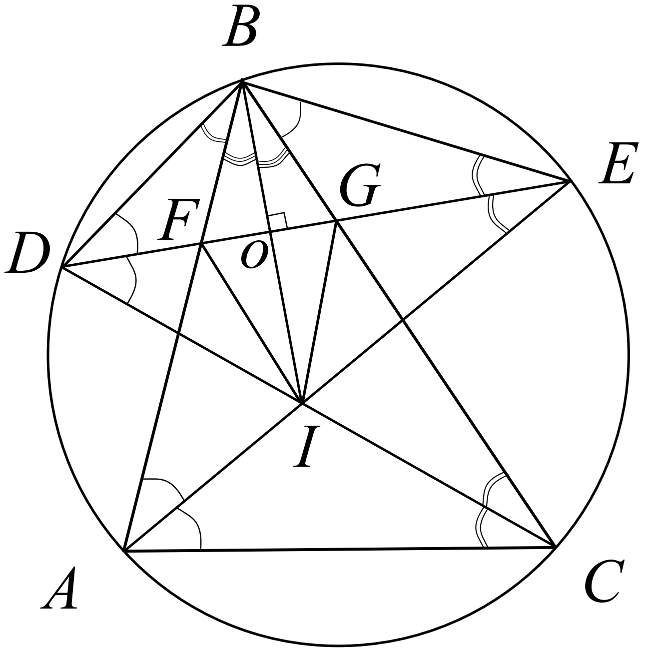
Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена $h(x)$. Это означает, что $f(x_1) = -g(x_1)$, $f(x_2) = -g(x_2)$. Отсюда получаем, что

$$g^3(x_1) + g^2(x_1) + g(x_1) = 0$$
$$g(x_1)(g^2(x_1) + g(x_1) + 1) = 0$$

Заметим, что ни при каких значенях $g(x_1)$ выражение $g^2(x_1)+g(x_1)+1$ не обратится в 0 (его можно рассмотреть как трехчлен с отрицательным дискриминантом). Поэтому произведение $g(x_1)(g^2(x_1)+g(x_1)+1)$ обращается в ноль только при $g(x_1) = 0$. Поэтому корень x_1 – корень трехчлена $h(x)$ – одновременно является корнем $g(x)$, и, следовательно, корнем $f(x)$. Аналогичные рассуждения верны в отношении корня x_2.

Итак, квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют по два корня, и их корни совпадают. Учитывая, что старшие коэффициенты равны 1, делаем вывод, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. (Утверждение о совпадении трехчленов с двумя одинаковыми корнями и одинаковыми старшими коэффициентами считается известным из школьного курса, так как $f(x) = 1 \cdot (x - x_1)(x - x_2) = g(x)$.)

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC соответственно в точках F и G. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб.
Решение.



Дуги BE и EC равны, так как на них опираются равные углы $\angle BAE$ и $\angle EAC$. Поэтому равны углы $\angle BDE$ и $\angle EDC$. Получили, что DE – биссектриса угла $\angle BDI$. Поэтому точки B и I лежат на лучах DB и DI, симметричных друг другу относительно прямой DE. Аналогично, точки B и I лежат на лучах EB и EI, симметричных друг другу относительно прямой DE. Поэтому точка B, как точка пересечения лучей DB и EB, при отражении относительно прямой DE, переходит в точку пересечения образов этих лучей, т.е. в точку пересечения лучей DI и EI, т.е. в точку I. Итак, точки B и I симметричны относительно прямой DE. Значит, угол $\angle BOE$ – прямой, и равны отрезки $BF = FI$, $BG = GI$.
Осталось заметить, что точки F и G симметричны относительно прямой BI, так как луч BI является биссектрисой угла FBG, и отрезок FG перпендикулярен биссектрисе (иными словами, треугольник FBG – равнобедренный, так как биссектриса угла $\angle GBG$ является высотой). Поэтому все отрезки равны между собой: $BF = FI = BG = GI$.

4. В некоторой стране 47 городов. В каждом городе есть автовокзал, из которого ходят автобусы в другие города страны и, возможно, за границу. Путешественник изучил расписание и определил для каждого города число внутренних автобусных линий, выходящих из него. Оказалось, что если не рассматривать город Озерный, то для

кажого из остальных 46 городов число внутренних линий, выходящих из него, отличается от числа линий, выходящих из других городов. Найдите, со сколькими городами страны имеет прямое автобусное сообщение город Озерный.
Число внутренних автобусных линий для данного города – это число городов своей страны, в которые можно доехать из данного города на прямом автобусе, без пересадок. Линии симметричны: если из города A можно доехать до города B, то и из города B можно доехать до города A.
Решение.
Заметим, что внешние линиии не учитываются в этой задаче.
Всего существует 47 вариантов числа внутренних линий – от 0 до 46. Заметим, что существование города с 46 линиями исключает существование города с 0 линиями и наоборот.
Пусть имеется город с 46 линиями. Тогда наименьшее число линий, выходящих из одного города - одна, и все числа от 1 до 46 встречаются без пропусков (городов без учета города Озерный – 46). Город, из которого ходит один автобус, не может быть связан с городом Озерный, так как его единственная линия должна приводить в годод с 46 линиями (иначе тому не найдется 46-й пары). Мы организовали пару 1-46. Также рассмотрим город с 45 линиями. Поставим ему в соответствие город с двумя линиями. Заметим, что город с двумя линиями не может быть связан с Озерным. Рассуждая так же дальше, мы организуем пары 3-44, 4-43 и т.д, до пары 23-24. Город с меньшим числом линий в каждой паре не связан с городом Озерный. Заметим, что город Озерный не входит в эти пары, так как для существования большего числа линий в каждой паре необходима связь с городом Озерный. Итак, все города разбиты на пары, каждое число линий от 1 до 46 встречается ровно один раз. Поскольку в каждой паре ровно один город связан с Озерным, то город Озерный связан с 23 городами, по числу пар.
Пусть максимальное число линий - 45. Значит, имеется город с 0 линиями (из него автобусы ходят только за границу), и все числа от 0 до 45 встречаются без пропусков (городов без учета города Озерный – 46). Снова составим пары 0-45, 1-44 и т.д. до 22-23. Аналогично предыдущему случаю, в паре 0-45 первый город не связан с Озерным, а второй - связан (иначе из него не получить 45 линий). В паре 1-44 город с одной линией не связан с Озерным (его связь занята на линию в город с 44 линиями), а город с 44 линиями связан с Озерным, чтобы набрать нужное число линий. Далее, в паре 2-43 город с двумя линиями не связан с Озерным (его связь занята на линии в города с 44 и 43 линиями), а город с 43 линиями связан с Озерным, чтобы набрать нужное число линий. Получили 23 пары. Город Озерный связан ровно с одним городом в каждой паре, поэтому он связан с 23 городами.
Ответ. Озерный связан с 23 городами.

5. Найдите все такие натуральные числа $n \geq 2$, что $20^n + 19^n$ делится на $20^{n-2} + 19^{n-2}$.
Решение.
Рассмотрим выражение
$$20^n + 19^n - 19^2 \cdot (20^{n-2} + 19^{n-2})$$
По условию, оно делится на $20^{n-2} + 19^{n-2}$. С другой стороны,
$$20^n + 19^n - 19^2 \cdot (20^{n-2} + 19^{n-2}) = 20^{n-2}(20^2 - 19^2) = 20^{n-2} \cdot 39$$
Заметим, что 20^{n-2} и $20^{n-2} + 19^{n-2}$ взаимно просты, т.к. ни один простой делитель 20^{n-2} не является делителем 19^{n-2}, и выражения 20^{n-2} и $20^{n-2} + 19^{n-2}$ не имеют

общих простых делителей. Поэтому в произведении $20^{n-2} \cdot 39$ только второй множитель может делиться на $20^{n-2} + 19^{n-2}$. При $n - 2 > 1$ выражение $20^{n-2} + 19^{n-2}$ превосходит 39, поэтому не может являться его делителем. Остается проверить подстановкой $n = 2, 3$.
При $n = 2$ $\ 20^0 + 19^0 = 2$, нечетное число $20^2 + 19^2 = 761$ не делится на 2. При $n = 3$ $20^1 + 19^1 = 39$, $20^3 + 19^3 = 39 \cdot (20^2 - 20 \cdot 19 + 19^2)$ делится на $20^1 + 19^1 = 39$.
Ответ. $n = 3$.