Муниципальный этап Российской олимпиады по математике

2019-20 учебного года

10 класс (*время решения – 4)*

1. Число 2019 обладает интересным свойством: сумма 2+019 ровно в 10 раз меньше суммы 201+9. Найдите все четырехзначные числа, обладающие таким свойством.

Ответ: 2019, 3028, 4037, 5046, 6055, 7064, 8073, 9082.

Решение. Представим искомое число в виде $1000a+100b+10c+d$, где a,b,c,d – цифры, причем $a\neq 0$. Так как число $100a+10b+c+d$ должно делиться на 10, то либо $c+d=0$, либо $c+d=10$. Первый случай возможен только при $c=d=0$, и для него условия задачи не выполнены; далее рассматриваем только второй случай. По условию задачи $(100b+10c+a+d)10=100a+10b+c+d$, откуда, с учетом равенства $c+d=10$, получаем $11b+c+1=a$. Так как $0<a<10$, то $b=0$, $a=c+1$. Итак, цифры искомого числа имеют вид: $a=t+1$, $b=0$, $c=t$, $d=10–t$, где t может быть любым целым число от 1 до 8. В итоге получаем 8 чисел, обладающих указанным в задаче свойством: 2019, 3028, 4037, 5046, 6055, 7064, 8073, 9082.

Критерии. Верный в целом ход решения (возможно, с потерей некоторых ответов) оценивается в 4 и более баллов; несколько правильных вариантов ответа при отсутствии общего принципа их поиска — не более 3 баллов.

2. Дан треугольник ABC с периметром 1. В угол BAC вписана окружность, лежащая вне треугольника ABC и касающаяся стороны BC (и продолжений сторон AB и AC). Найдите длину отрезка AM, где M – точка, в которой окружность касается прямой AC.

Ответ: $AM=1/2$.

Решение. Пусть окружность касается прямой AB в точке N, а стороны BC – в точке P. Тогда, по свойству окружности, вписанной в угол, $PC=CM$, $BP=BN$. Так как периметр треугольника ABC равен 1, то

$BA+AC+CB= BA+AC+CP+PB=AB+BN+AC+CM=AN+AM=1$.

Но $AN=AM$, следовательно, $2AM=1$, $AM=1/2$.

Критерии. Ответ без обоснования оценивается в 0 баллов.

3. Докажите, что при всех $x>0$ справедливо неравенство $1/x+4x^2\geq 3$.

Решение. Так как $y+1/y\geq 2$ при всех $y>0$, то

$$\frac{1}{x}+4x+4x^2-4x+1-1=2\left(\frac{1}{2x}+2x\right)+(2x-1)^2-1\geq 4-1=3.$$

4. Рассмотрим семейство парабол вида $y=-x^2+px+q$, вершины которых лежат на графике $y=x^2$. Докажите, что все кривые этого семейства проходят через общую точку.

Решение. Поскольку точка (a,a^2) параболы $y=x^2$ является вершиной параболы $y=-x^2+px+q=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}+q$, то $p=2a$. Следовательно, $a^2=-a^2+2a^2+q$ и $q=0$. Парабола $y=-x^2+px$ пересекает ось Ox в точках 0 и p, если $p\neq 0$, и касается ее, если $p=0$. Так как точка (a,a^2) была выбрана произвольно, то все параболы семейства проходят через начало координат.

Критерии. Указано, но не обосновано, что начало координат является общей точкой – 1 балл.

5. Куб с длиной ребра 7 разрезали на единичные кубики и убрали кубик, находящийся в центре большого куба. Можно ли оставшуюся фигуру составить из брусочков $1\times1\times2$?

Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим единичные кубики «в шахматном порядке»: в нижнем слое $7\times7\times1$ угловые кубики покрасим в чёрный цвет, два прилегающих к нему по грани кубика – в белый цвет, прилегающие к ним – снова в чёрный, и т.д.; в каждом следующем слое покрасим кубики в цвета, противоположные цветам кубиков под ними. Всего чёрных кубиков оказывается на 1 больше, чем белых. Действительно, в 1-м, 3-м, 5-м и 7-м снизу слоях по 25 чёрных кубиков и по 24 белых, во 2-м, 4-м и 6-м слоях – по 24 чёрных и по 25 белых. При этом центральный кубик (лежащий в четвертом слое) окажется белым. Значит, если его убрать, то среди оставшихся кубиков чёрных будет на 2 больше, чем белых. Теперь заметим, что где бы внутри большого куба ни располагался брусочек $1\times1\times2$, он состоит из одного чёрного и одного белого кубиков. Следовательно, из таких брусочков невозможно собрать фигуру, в которой чёрных и белых кубиков не поровну.

Критерии. Ответ без обоснования оценивается в 0 баллов.