11 класс

1. Ответ: n=k.

Решение: По условию задачи составляем уравнение

$$\frac{a+b}{2}=\frac{an+bk}{n+k}$$

где a - среднее арифметическое всех красных чисел, b - среднее арифметическое всех синих чисел.

Данное уравнение преобразуем к виду

$$a(n-k)=b(n-k)$$

Так как $a\neq b$, то $n-k=0$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Рассмотрены только частные случаи значений n и k - 0 баллов.

Только верный ответ – 0 баллов.

Уравнение по условию задачи составлено верно, но допущены ошибки в последующих преобразованиях и получен неверный ответ – 2 балла.

Уравнение по условию задачи составлено верно, но допущены ошибки в последующих преобразованиях и получен верный ответ – 3 балла.

2. Ответ: $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2,} \\ \boldsymbol{y=\pi n,\ \ n\in Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=2,} \\ \boldsymbol{y=\frac{\pi}{2}(2m+1), m\in Z} \end{cases}$

Решение. $(x+2cosxy)^2+4(1-cos^2xy)=0,\ \ (x+2cosxy)^2+4sin^2xy=0,$

$\begin{cases} x+2cosxy=0, \\ sinxy=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2cosxy, \\ xy=\pi k, k\in Z. \end{cases}$

Если k - четное, то $\begin{cases} x=-2, \\ y=\pi n,\ \ n\in Z \end{cases}$

Если k- нечетное, то $\begin{cases} x=2, \\ y=\frac{\pi}{2}(2m+1), m\in Z \end{cases}$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Уравнение преобразовано таким образом, что возможно выполнить оценку - 3 балла, оценка выполнена, но решение не доведено до ответа - 4 балла. В остальных случаях 0 баллов.

3. Ответ: 1900 и 960.

Решение. Пусть a и $в$ - количество воды, которое было долито в первую и вторую колбы соответственно, тогда $\frac{500+a}{500}=m,\ \frac{720+b}{720}=t, a=500m-500, b=720t-720$

Рассмотрим функцию $y=a+b=-1220+500m+720\left(\frac{16-m}{m}\right)=-1940+500m+720\frac{16}{m},\ \ y'=500-720\frac{16}{m^2};$

$y'=0, m=\pm\frac{24}{5}, m>0, m=\frac{24}{5}-$ точка минимума, $t=\frac{7}{3}; a=500\frac{24}{5}-500=1900,$

$$b=720\frac{7}{3}-720=960.$$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Введена функция $y=-1940+500m+720\frac{16}{m}$ - 3 балла, найдены точки экстремума - 4 балла. Решение полное, но содержит арифметическую ошибку или ошибку в преобразованиях 5.

4. Ответ: нельзя.

Решение: 1) Сумма 9999 последовательных натуральных чисел делится на 9999.

Докажем это утверждение.

$$n+(n+1)+(n+2)+\dots+(n+9998)=9999n+(1+2+\dots+9998)=$$

$=9999n+\frac{9998\times9999}{2}=9999n+9999\times4999$ – делится на 9999.

2) $9999=9\times11\times101$, 101 является простым числом, а в произведении $1\times2\times3\times\ldots\times100$ такого множителя нет. Поэтому $1\times2\times3\times\ldots\times100$ не делится на 101, а, значит, не делится на 9999. Поэтому произведение $1\times2\times3\times\ldots\times100$ нельзя представить в виде суммы 9999 последовательных натуральных чисел.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Только верный ответ – 0 баллов.

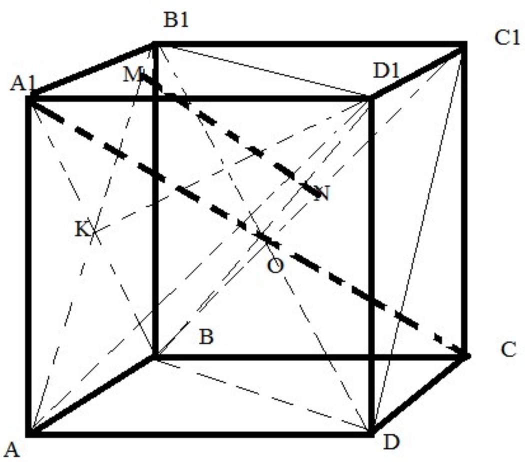
Решение верное, но нет доказательства утверждения, что сумма 9999 последовательных натуральных чисел делится на 9999 – 5 баллов.

Решение верное, но в нем явно не указано, что 101 является простым числом – 6 баллов.

Решение верное, но нет доказательства утверждения, что сумма 9999 последовательных натуральных чисел делится на 9999 и в нем явно не указано, что 101 является простым числом – 4 балла.

5. Ответ: 1:2 и 3:1.

Решение.



В треугольнике A_1BD_1 D_1K и A_1O - медианы, а их точка пересечения является точкой пересечения прямой A_1C и плоскости AB_1D_1, O - середина A_1C_1, следовательно, точка пересечения прямой и плоскости делит диагональ в отношении 1:2. Плоскость BDC_1 делит эту же диагональ в отношении 1:2, значит обе плоскости AB_1D_1 и BDC_1 делят диагональ на три равные части, а концы отрезка MN принадлежат параллельным плоскостям, а сам отрезок параллелен диагонали A_1C. Отрезки прямых, заключенных между параллельными плоскостями равны, значит искомое отношение 3:1.