Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

11 класс

Решения и ответы

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ с разностью 2, в которой при всех $k = 1, 2 \ldots, n$ все числа $a_k^2 + 1$ являются простыми?
   Решение.
   Все члены прогрессии должны быть четными числами. Рассмотрим остатки от деления на 5. Поскольку разность арифметической прогрессии равна 2, то в прогрессии будут встречаться все остатки от деления на 5, в порядке
   $\ldots 2, 4, 1, 3, 0, 2, 4, 1, 3, 0, \ldots$. Значит, среди членов прогрессии встретятся числа вида $a_k = 5t + 2$ и $a_k = 5t + 3$ (t – натуральное). Для этих чисел вычисляем $a_k^2 + 1 = 25t^2 + 20t + 5$ и $a_k^2 + 1 = 25t^2 + 30t + 10$. Получили, что указанные члены прогрессии $a_k = 5t + 2$ и $a_k = 5t + 3$ дают выражения $a_k^2 + 1$, котрые делятся на 5 и не являются простыми. Максимально длинный набор членов арифметической прогрессии, не содержащий чисел вида $a_k = 5t + 2$ и $a_k = 5t + 3$, состоит из двух чисел. Поэтому нужных нам членов прогрессии, идущих подряд, может быть не более двух. Единственный случай, когда можно получить последовательность из трех чисел – включить в $a_k^2 + 1$ число 5. Действительно, числа $2, 4, 6$ образуют арифметическую прогрессию и дают соответствующую последовательность простых чисел $5, 17, 37$.
   Ответ. $n = 3$.

2. Даны 2019 многочленов 2018-й степени, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих многочленов имеет общий корень с суммой 2018 остальных. Докажите, что сумма этих 2019 многочленов равна нулю.
   Решение.
   Пусть $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ \ldots, P_{2019}(x)$ – данные многочлены, $H(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots + P_{2019}(x)$ – их сумма. Отметим, что $H(x)$ – многочлен степени не выше 2018. Пусть x_1 – корень многочлена $P_1(x)$, этот корень не совпадает с корнями других многочленов $P_2(x),\ P_3(x),\ \ldots, P_{2019}(x)$. По условию, x_1 – корень многочлена $P_2(x) + P_3(x) + \ldots + P_{2019}(x)$, т.е.

   $$P_1(x_1) + (P_2(x_1) + P_3(x_1) + \ldots + P_{2019}(x_1)) = 0$$

   Значит, $H(x_1) = 0$. Аналогично видим, что $H(x_2) = 0$, $H(x_3) = 0, \ldots, H(x_{2019}) = 0$, где $x_2,\ x_3, \ldots, x_{2019}$ – корни соответствующих многочленов, и они не равны между собой.
   Мы получили, что многочлен 2018-й степени (или меньшей) $H(x)$ обращается в ноль в 2019 различных точках, следовательно, этот многочлен тождественно равен 0.

3. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник, так, что все его вершины находятся в вершинах клеток, и ни одна из его сторон не идет по горизонтали или вертикали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника.
   Решение.

Докажем, что площадь многоугольника равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника. Пусть длины соотвествующих горизонтальных отрезков равны a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n. Многоугольник разбивается горизонтальными отрезками сетки на два треугольника и на $n-1$ трапецию. Высота каждой такой фигуры равна 1 (стороне клетки). Площади треугольников $S_0 = \dfrac{a_1}{2}$ и $S_n = \dfrac{a_n}{2}$. Площадь одной трапеции равна $S_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Площадь всего многоугольника

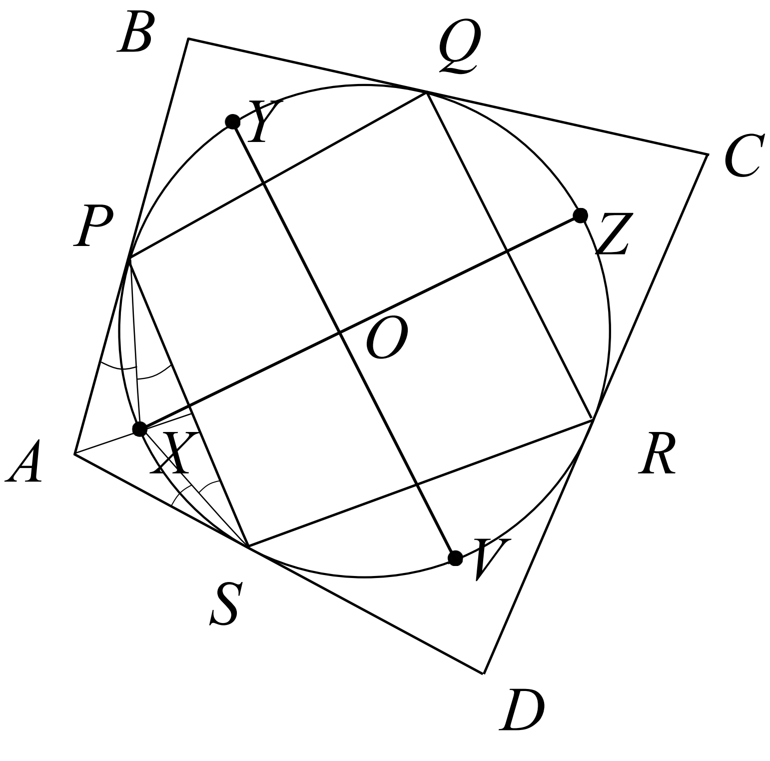
$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots + S_{n-1} + S_n =$$

$$= \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \ldots + \frac{a_i + a_{i+1}}{2} + \frac{a_{i+1} + a_{i+2}}{2} \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} + \frac{a_n}{2} =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_n$$

Аналогично, площадь многоугольника равна сумме длин вертикальных отрезков линий сетки. Это доказывается такими же рассуждениями про вертикальные отрезки. Значит, указанные в условии суммы равны между собой.

4. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности ω. P, Q, R, S – точки касания этой окружности со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно. В треугольники APS, BPQ, CQR, DRS вписаны окружности. Центры этих окружностей обозначены X, Y, Z, V соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника $XYZV$ взаимно перпендикулярны.
Решение.



Рассмотрим треугольник APS и точку X_1 - середину дуги PS окружности ω (на рисунке не показана, мы сейчас докажем, что она совпадет с точкой X). Докажем, что точка X_1 совпадает с точкой X. Заметим, что угол между хордой X_1P и касательной AP равен вписанному углу $\angle PSX_1$, опирающемуся на эту хорду. Так как X_1 – середина дуги PS, то угол $\angle PSX_1$ равен углу $\angle SPX_1$. Поэтому луч PX_1 – биссектриса угла $\angle APS$. Так же получаем, что луч SX_1 – биссектриса угла

$\angle ASP$. Поэтому точка X_1 – точка пересечения его биссектрис треугольника APS, значит, совпадает с точкой X. Аналогично, остальные центры вписанных окружностей Y, Z, V лежат на серединах соответствующих дуг.
Пусть диагонали четырехугольника $XYZV$ пересекаются в точке O. Заметим, что сумма дуг SP, PQ, QR, RS дает длину окружности, а сумма половинок этих дуг PX, PY, RZ, RV дает половину длины оуружности. По известному факту, величина угла $\angle XOY$ равна полусумме дуг XY и ZV, т.е. половине от половины угловой величины окружности, т.е $90°$.

5. Каждый зритель спектакля, купивший билет в первый ряд, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своем месте. Билетер может поменять местами двух соседей, если оба сидят не на своих местах. Сможет ли он рассадить всех зрителей первого ряда на свои места при любой указанной первоначальной рассадке?
Решение.
Занумеруем места в первом ряду слева направо от 1 до n, и занумеруем зрителей номерами их правильных мест (написанными на билетах). Будем двигать зрителя с номером N вправо. Если нам удастся пересадить зрителя N на свое место, то задача будет решена, так как тем же способом мы потом пересадим зрителя номер $N-1$ на свое место и т.д.
Пересаживаем зрителя N вправо, меняя его с соседом. Это можно сделать при условии, что на месте с номером $k+1$ не сидит зритель K (где-то справа от начального положения N). Заметим, что такая неподходящая нам рассадка "ступенькой" может быть длиннее, чем в одно место. Покажем, как необходимо действовать в этом случае.
Итак, пусть на месте с номером $k+1$ сидит зритель K, на месте с номером $k+2$ сидит зритель $K+1$ и так далее, до места с номером $k+j$, на котором сидит зритель $K+J-1$, при этом дальше "ступенька" не продолжается (J – максимально возможное число для данного K). Рассмотрим два случая.
Первый случай, $k+j<n$, т.е. "ступенька" не доходит до правого края ряда. В этом случае справа от "ступеньки" на месте $k+j+1$ сидит зритель P, номер которого не совпадает со зрителями, образуюшими "ступеньку" т.е. $P \neq K+J$, $P \neq K+J-1, \ldots P \neq K+1$. Поэтому зрителя P можно переместить налево до тех пор, пока он не поменяется местами со зрителем N. После этого зрителя N можно пересадить вправо до конца ступеньки, на место $k+j+1$. При этом все зрители $K, \ldots, K+J-1$ сначала сдвинутся на одно место вправо, а затем вернутся на свои места, а N и P поменяются местами. Итак, зрителя N можно пересадить через "ступеньку".
Второй случай, $k+j=n$, т.е. "ступенька" доходит до правого края ряда, и самым правым будет зритель $N-1$. В этом случае все зрители, начиная с номера K, рассаживаются на свои места, попарно меняясь местами, вплоть до зрителя N.
Итак, действуя по указанному правилу, можно рассадить всех зрителей, начиная с номера N и далее по убыванию.
Ответ. Да, билетер сможет рассадить всех зрителей.