ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/2020 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

1. В каждую клетку таблицы 3х3 записали иррациональное число. Могло ли оказаться, что сумма чисел каждой строки и каждого столбца – число рациональное.
2. Два парка общей площадью 110 га разбиты на одинаковое количество участков, причем в каждом парке участки имеют одинаковую площадь, но отличаются от участков другого. Если первый парк разбили бы на участки такой же площади, как второй, то получили бы 75 участков. А если бы второй парк разбили на участки такой же площади, как первый, то участков получилось бы 108. Определите площадь каждого парка.
3. В основании треугольной пирамиды SABC лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC (AC=BC). SH – высота пирамиды, причем H – точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что высоты пирамиды, проведенные из вершин S, A и B, пересекаются в одной точке.
4. Даны функции $f(x)=x^2+4x+3$ и $g(x)=x^2+2x-1$. Найдите все целочисленные решения уравнения $f(g(f(x)))=g(f(g(x)))$.
5. В треугольнике ABC угол C равен 60°, точки I и O – центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что отрезок, соединяющий точку I и середину дуги AB, равен радиусу этой описанной окружности?
6. Робот Петя каждую минуту на экране показывает три трехзначных числа, дающие в сумме 2019. Робот Вася в каждом из этих чисел меняет местами первую и последнюю цифры и снова складывает полученные числа. Какую наибольшую сумму может получить Вася?

***Время выполнения работы – 240 минут.***

## Решения и критерии проверки.

**1. Ответ.** Да. **Решение.** Годится, например, следующая расстановка

| | | |
|---|---|---|
| $1-\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ | $2-\sqrt{2}$ |
| $3-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $2\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ |

**Критерии проверки.** Любая верная расстановка – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

**2. Ответ.** 50 и 60 га. **Решение**. Пусть x – площадь первого парка. В соответствии с условием составим таблицу (для нового разбиения):

| Парк | При новом разбиении | | |
|---|---|---|---|
| | Площадь парка | Число участков | Площадь участка |
| Первый | x | 75 | x / 75 |
| Второй | 110 - x | 108 | (110 - x) / 108 |

Тогда для первоначального разбиения выполняется:

| Парк | При первоначальном разбиении | | |
|---|---|---|---|
| | Площадь парка | Число участков | Площадь участка |
| Первый | x | 108x / (110 – x) | (110 - x) / 108 |
| Второй | 110-x | 75(110 - x) / x | x / 75 |

По условию 108x / (110 – x) = 75(110 - x) / x. Отсюда находим x=50.

**Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов**, верное решение, но ответ неверный из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, верно построена модель и составлено уравнение – **3 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.

3. **Решение**. Пусть AM и BN – высоты треугольника ABC. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что BC перпендикулярна SM, а значит плоскости ASM. Аналогично BN перпендикулярна SN, а значит плоскости BSN. Получается, что высота пирамиды $AH_1$ лежит в плоскости ASM, а высота $BH_2$ – в плоскости BSN. Из равнобедренности ABC следуют равенства AH=BH и HN=HM, следовательно, равны треугольники ASM и BSN. Значит, совпадают и их ортоцентры. Если в треугольнике ASM высоты $AH_1$ и SH пересекаются в точке O, то в треугольнике BSN высоты $BH_2$ и SH также пересекаются в точке O.

**Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов**, доказано пересечение двух высот пирамиды – **2 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.

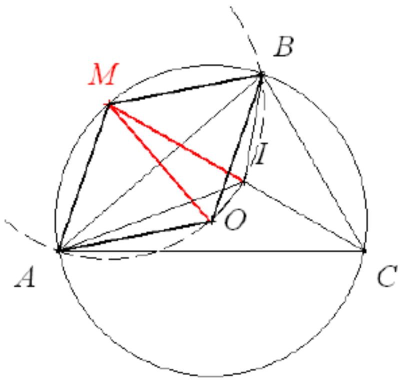
4. **Ответ**. $x=-2$. **Решение**. Представим функции в виде $f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$ и $g(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$. Тогда $f(g(x))=((x+1)^2-2+2)^2-1=(x+1)^4-1$, $g(f(x))=((x+2)^2-1+1)^2-2=(x+2)^4-2$. Выполняя аналогичные операции получим $g(f(g(x)))=(x+1)^8-2$ и $f(g(f(x)))=(x+2)^8-1$. Таким образом, уравнение имеет вид

$$(x+1)^8-(x+2)^8=1,$$

$$\left((x+1)^4-(x+2)^4\right)\left((x+1)^4+(x+2)^4\right)=1.$$

Очевидно, что вторая скобка может быть равна только 1, значит и первая равна 1. Данная система имеет единственное решение $x=-2$.

**Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов**, правильно выписаны все композиции функций, но решение не закончено или неверное – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.




5. **Решение.** Пусть M – середина дуги AB. Центральный угол $\angle AOB=2\angle ACB=120°$ и биссектриса угла C проходит через I и M. Заметим, что треугольники AOM и BOM – правильные. Выразим угол $\angle AIB=180°-(\angle BAC+\angle ABC)/2=$
$=180°-(180°-\angle BCA)/2=180°-60°=120°=\angle AOB$.
Значит, точки I и O лежат на окружности, описанной около треугольника AOB, т.е. на окружности с центром в M и радиусом MO. Следовательно, MO=MI.

**Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

6. **Ответ.** 2118. **Решение.** Обозначим исходные числа $\overline{a_1b_1c_1}, \overline{a_2b_2c_2}, \overline{a_3b_3c_3}$**,** тогда $100(a_1+a_2+a_3)+10(b_1+b_2+b_3)+(c_1+c_2+c_3)=2019$ . Пусть $S=100(c_1+c_2+c_3)+10(b_1+b_2+b_3)+(a_1+a_2+a_3)$. Чтобы S было наибольшим, нужно чтобы следующая величина была наименьшей: $2019-S=99(a_1+a_2+a_3)-99(c_1+c_2+c_3)$ . Найдем минимальное значение $a_1+a_2+a_3$ и максимальное значение $c_1+c_2+c_3$. Заметим, что сумма цифр $a_1+a_2+a_3$ не может быть меньше 18, так как сумма $10(b_1+b_2+b_3)+(c_1+c_2+c_3)$ точно меньше 300. А сумма цифр $c_1+c_2+c_3$ оканчивается на 9, следовательно, не может быть больше, чем 19. Если $a_1+a_2+a_3=18$ и $c_1+c_2+c_3=19$, то получим минимально возможную разность $2019-S=-99 \Rightarrow S=2118$. Пример подходящей тройки чисел: 365, 785 и 869 (*есть и другие варианты*).

**Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов**, оценка без примера **– 4 балла**, только пример – **2 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.