

1. Однажды Карлсон и Винни Пух соревновались в скорости поедания меда и варенья. Карлсон – большой специалист по варенью съедает банку варенья за 2 минуты, в то время как Винни Пух справляется с такой же банкой за целых 7 минут. Зато Винни Пух расправляется с горшочком меда за 3 минуты, а Карлсону на это требуется 5 минут. Всего у них было 10 банок варенья и 10 горшочков меда. За сколько минут они всё съели, если известно, что они начали и закончили есть одновременно? (Каждый съедает горшочек меда или банку варенья целиком).

*Ответ:* 48 минут.

*Решение.* Пусть Карлсон съел  $M$  горшочков меда и  $B$  банок варенья. Тогда из условия следует  $5M + 2B = 3 \cdot (10 - M) + 7 \cdot (10 - B)$ , откуда  $8M + 9B = 100$ . В целых неотрицательных числах это уравнение имеет единственное решение  $M = 8$ ,  $B = 4$ . Можно найти его, например так:  $8M + 8B \leq 100$ , откуда  $M + B < 13$ ; с другой стороны  $9M + 9B \geq 100$ , откуда  $M + B > 11$ . Таким образом,  $M + B = 12$ , а так как  $8 \cdot (M + B) + B = 100$ , то  $B = 4$ , а  $M = 8$ . Осталось найти время:  $8 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = \underline{\underline{48 \text{ минут}}}$ .

**Критерии.** Только правильный ответ — 0 баллов.

Правильный ответ с указанием количества варенья и меда, съеденного каждым из участников — 1 балл.

Составлено уравнение в целых числах ( $8M + 9B = 100$  или аналогичное, в зависимости от введенных обозначений), но не найдено его решение — 2 балла.

Составлено уравнение и угадано его решение в целых неотрицательных числах, но не доказана единственность такого решения — 3 балла.

Составлено уравнение, найдено его общее решение (для уравнения  $8M + 9B = 100$ :  $M = 9t + 8$ ,  $B = 4 - 8t$ ), но ответ не найден — 3 балла.

2. На прямых, содержащих диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD, взяты соответственно точки K и M такие, что прямая BK параллельна прямой AD, а прямая AM параллельна прямой BC. Доказать, что прямая KM параллельна прямой CD.

*Решение.* Пусть прямые AC и BD пересекаются в точке O, тогда треугольники OKB и OAD подобны (по двум парам соответственных углов при параллельных прямых BK и AD). Аналогично подобны треугольники OAM и OCB. Из подобий следует  $OK/OB = OA/OD$  и  $OA/OM = OC/OB$ . Перемножив эти равенства получим  $OK/OM = OC/OD$ . Кроме того, треугольники KOB и COD имеют общий угол O, следовательно они подобны. Их сходственные углы, например ОКМ и OCD, являются соответственными при прямых KM и CD и секущей KC, следовательно прямые KM и CD параллельны.

**Критерии.** Решение существенно опирается на взаимное расположение точек на прямых не учитывая, что точки M и K могут лежать как на диагоналях, так и на их продолжениях — не более 5 баллов.

3. Веса четырёх гирь образуют возрастающую геометрическую прогрессию, состоящую из положительных чисел. Как при помощи не более чем двух взвешиваний определить самую тяжёлую гирю?

*Решение.* Заметим, что самая тяжёлая гиря в паре с любой другой тяжелее двух оставшихся. Для этого достаточно убедиться, что самая тяжёлая и самая лёгкая вместе тяжелее двух средних. Пусть веса гирь равны  $m, mq, mq^2, mq^3$ . Тогда  $m + mq^3 = m \cdot (1 + q^3) = m \cdot (1 + q) \cdot (1 - q + q^2) > m \cdot (1 + q) \cdot q = mq + mq^2$  (из неравенства Коши  $1 + q^2 \geq 2q$ , откуда  $1 - q + q^2 \geq q$ , но равенство достигается только при  $q=1$ ). Таким образом, если положить на чаши весов по две гири, то самая тяжёлая окажется в более тяжёлой паре. Вторым взвешиванием сравним гири из этой пары.

**Критерии.** Предъявлена верная последовательность взвешиваний, но не доказано, что при этом всегда будет найдена самая тяжёлая гиря или доказательство опираются на конкретное значение знаменателя прогрессии (частный случай) — 2 балла.

Доказано, что при любом знаменателе прогрессии самая тяжёлая гиря вместе с самой лёгкой весят больше двух оставшихся, но последовательность взвешиваний не найдена или содержит ошибки — 4 балла.

Доказано, что при любом знаменателе прогрессии веса двух самых тяжёлых гирь отличаются больше, чем веса двух лёгких гирь, но дальнейших рассуждений нет — 2 балла (суммируются с баллами за правильную последовательность взвешиваний).

4. Можно ли многочлен  $x^{2019}y^{2019} + x^{2018}y^{2018} + \dots + x^2y^2 + xy + 1$  представить в виде произведения двух многочленов  $f(x)$  и  $g(y)$ ?

*Решение.* Предположим, что для некоторых  $f(x)$  и  $g(y)$  многочлен  $x^{2019}y^{2019} + x^{2018}y^{2018} + \dots + x^2y^2 + xy + 1$  тождественно равен  $f(x) \cdot g(y)$ , тогда при  $x=0$  получим  $x^{2019}y^{2019} + x^{2018}y^{2018} + \dots + x^2y^2 + xy + 1 = 1 = f(0) \cdot g(y)$ , откуда  $g(y) = 1/f(0)$  — постоянный многочлен. Аналогично  $f(x) = 1/g(0)$ . Но тогда  $f(x) \cdot g(y)$  является постоянным многочленом. Очевидно, что  $x^{2019}y^{2019} + x^{2018}y^{2018} + \dots + x^2y^2 + xy + 1$  таковым не является.

**Критерии.** Рассмотрено два различных значения  $x_1$  и  $x_2$ , при которых  $f(x_1) \neq 0$  и  $f(x_2) \neq 0$ , выписаны два выражения для  $g(y)$  и предпринята не доведенная до конца попытка доказать, что они не тождественны — 2 балла.

5. На координатной плоскости по точкам с целыми координатами прыгает кузнечик. Длины его прыжков составляют последовательность натуральных чисел: 1, 2, 3, ... Может ли кузнечик вернуться в ту же точку, из которой начинал, сделав ровно 2222 прыжка?

*Решение.* Посмотрим, как меняется сумма координат кузнечика во время прыжка. По теореме Пифагора  $x_n^2 + y_n^2 = n^2$ , где  $x_n$  — разность абсцисс до и после прыжка,  $y_n$  — разность ординат, а  $n$  — длина прыжка. Заметим, что если  $n$  — чётное, то  $x_n$  и  $y_n$  либо оба нечётные, либо оба чётные, а значит, сумма абсциссы и ординаты кузнечика не меняет своей чётности. Если же  $n$  — нечётное, то среди  $x_n$  и  $y_n$  ровно одно нечётное, следовательно, сумма координат кузнечика меняет свою чётность. Прыжков нечётной длины ровно  $2222 / 2 = 1111$  — нечётное количество, поэтому после 2222 прыжков кузнечик окажется в точке, в которой сумма координат имеет чётность, отличную от начальной.

**Критерии.** Задача решена в предположении, что все прыжки параллельны линиям координатной сетки — 1 балл.

Доказано, что при любом прыжке сумма горизонтальной и вертикальной составляющих имеет такую же четность, как длина прыжка — 3 балла.