Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

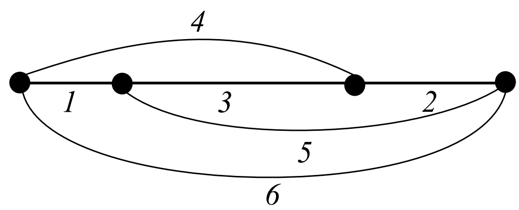
Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. Могут ли четыре корабля так расположиться на море, чтобы попарные расстояния между ними были бы равны соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6 милям?
Решение.
Достаточно привести рисунок или описание расположения. Корабли размещаются на одной прямой.



Ответ. Да, могут.

2. Решите уравнение НОК(n^2, m)+НОК$(n, m^2) = 2019$, где n и m – натуральные числа.
Решение.
Первый способ. Каждое из слагаемых делится на n и на m, поэтому сумма делится и на n, и на m. Далее, правая часть, т.е. 2019, должно делиться и на n, и на m. Но $2019 = 3 \cdot 673$, поэтому возможные значения n и m – это 1, 3, 673. Проверкой убеждаемся, что если хотя бы одно число равно 673, то его квадрат слишком большой для правой части, а если эти числа равны 1 или 3 в любых комбинациях, то квадрат этих чисел слишком мал для правой части 2019.
Второй способ. Представим числа n и m в виде $n = p \cdot q$, $m = p \cdot r$, где p – произведение всех общих простых множителей чисел n и m, q – произведение простых множителей n, не входящих в m, r – произведение простых множителей m, не входящих в n (варианты $p = 1$ или $q = 1$ или $r = 1$ тоже должны быть рассмотрены). Тогда НОК$(n^2, m) = p^2 \cdot q^2 \cdot r$, НОК$(n, m^2) = p^2 \cdot r^2 \cdot q$. Вынесем общие множители в сумме НОК(n^2, m)+НОК$(n, m^2) = p^2 \cdot q \cdot r \cdot (q + r)$. Заметим, что $2019 = 3 \cdot 673$, оба множителя простые. Из написанного выше разложения суммы НОК мы должны представить 2019 в виде произведения как минимум четырех множителей - квадрата простого числа, двух простых чисел и еще одного числа $(r + q)$. Так как в разложении 2019 на простые множители нет ни одного квадрата, то исходное уравнение не имеет решений при $p \neq 1$. Оно не имеет решений и при $p = 1, n \neq 1$, $m \neq 1$, так как произведение $q \cdot r \cdot (q + r)$ должно соответствовать произведению $2019 = 3 \cdot 673$. Если одно из чисел n и m было бы равно 1, (например, n), то уравнение свелось бы к $m + m^2 = 2019$, не имеющему решений в натуральных числах, что также можно проверить, используя разложение 2019 на простые множители. (Решение, содержащее $q = 1$ и/или $r = 1$ при $n \neq 1$, $m \neq 1$ попадает под случай $p \neq 1$ и также невозможно.)
Ответ. Решений нет.

3. Картофель и свеклу везут на 79 машинах, не обязательно одинаковых, причем каждая машина загружена или картофелем, или свеклой. Докажите, что из этих машин можно выбрать 40 машин так, что они везут не менее 50% всего картофеля и не менее 50% всей свеклы.
Решение.
Пусть картофель перевозится n машинами. Расположим машины в порядке убывания массы перевозимого картофеля.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n$$

Пусть свекла перевозится k машинами. Расположим машины в порядке убывания массы перевозимой свеклы.

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_{k-1} \geq b_k$$

Одно из чисел n, k четное, второе нечетное (их сумма равна 79). Пусть, для определенности, четным является n, т.е. $n = 2p, k = 2t-1$. Выберем p первых (упорядоченных) машин, перевозящих картофель и t машин, перевозящих свеклу. Очевидно,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p \geq a_{p+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

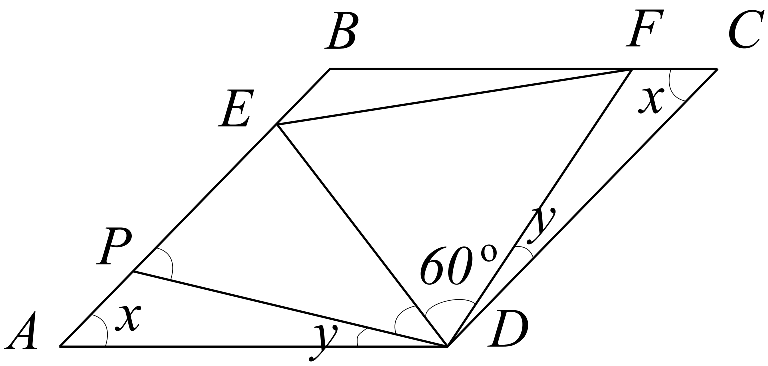
так как каждое слагаемое, стоящее на месте с номером i слева, не меньше соответствующего слагаемого, стоящего на месте с номером i справа. Все p слагаемых слева в сумме дают не меньше половины всей массы картофеля. Действительно, если предположить, что сумма слева меньше $\frac{1}{2}M$ (M - общая масса картофеля), и сумма справа не может превышать сумму слева, то сумма левой и правой части неравенства будет меньше $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M$. Итак, мы показали, что выбранные первые p машин перевозят не меньше половины массы картофеля.
Аалогично выберем t первых (упорядоченных) машин, перевозящих свеклу

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_t \geq b_{t+1} + \ldots + b_{k-1} + b_k$$

Отметим, что число слагаемых слева на одно больше, чем справа, поэтому можно попарно сравнить слагаемые слева и справа (одно слагаемое слева окажется без пары), и получить, что сумма слева не меньше суммы справа. Выбранные первые t машин перевозят не меньше половины массы свеклы.
Осталось оценить число машин. $79 = 2p + 2t - 1$, т.е. $2p + 2t = 80$, $p + t = 40$. Мы доказали, что выбрали 40 машин.

4. ABCD – ромб. Точки E и F лежат, соответственно, на сторонах AB и BC так, что $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{BF}{CF} = 5$. Треугольник DEF – равносторонний. Найдите углы ромба.
Решение.

Обозначения показаны на рисунке. Ситуация, когда угол D ромба острый, невозможна (см. далее). Отметим на стороне AB точку P так, что $AP = EB = FC$. Треугольники CDF и ADP равны, так как имеют равные углы $\angle A = \angle C$ и попарно равные стороны $AD = DC$, $AP = FC$. С учетом того, что треугольник FED равносторонний по условию, получаем, что треугольник EDP – равнобедренный ($ED = FD = PD$). (В этот момент заметим, что если угол ромба $\angle A$ тупой, то угол $\angle APD$ острый, и в равнобедренном треугольнике EDP угол при основании тупой,



что невозможно). Отметим равные углы $x = \angle A = \angle C$ и $y = \angle ADP = \angle CDF$. Находим $\angle EPD = x+y$ (внешний угол треугольника ADP) и $\angle PDE = 180^\circ - 2(x+y)$. Сложим все углы при вершине D ромба ($\angle D = 180^\circ - x$), получим уравнение

$$y + 180^\circ - 2(x + y) + 60^\circ + y = 180^\circ - x$$

Отсюда $x = 60^\circ$, углы ромба равны 60° и 120°.
Окончание решения может быть другим. После того, как доказали, что треугольник EDP равнобедренный, заметим, что равны его внешние углы: $\angle APD = \angle BED$. Отсюда треугольники APD и BED равны по двум указанным углам и сторонам ($AP = EB$, $PD = ED$). Отсюда $BD = AD$, и треугольник ABD равносторонний. Значит, $\angle BAD = 60^\circ$.
Ответ. Углы ромба равны 60° и 120°.

5. Узлы бесконечной сетки (каждая ячейка предсталяет собой квадрат) раскрашены в три цвета, причем все три цвета использованы. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с катетами, не обязательно идущими по линиям сетки, все три вершины которого расположены в узлах сетки и раскрашены в разные цвета.
Решение.
Пронумеруем цвета узлов - первый, второй, третий.
Рассмотрим первый случай. Все горизонтальные прямые раскрашены каждая в свой цвет (на каждой горизонтальной прямой содержатся узлы только одного цвета). В таком случае берем произвольный узел первого цвета и проводим через него две взаимно перпендикулярные прямые по диагональным линиям сетки. Пересечение с двумя прямыми, окрашенными во второй и третий цвет, даст две вершины прямоугольного треугольника. (Каждая из двух диагональных прямых будет иметь хотя бы одно пересечение с горизонтальной прямой второго цвета и с горизонтальной прямой третьего цвета).
Рассмотрим второй случай. Найдется горизонтальная прямая l, содержащая узлы двух цветов (первого и второго). Берем на плоскости узел третьего цвета (он существует и не лежит на l). Проводим через него вертикальную прямую до пересечения с l. В пересечении получаем узел одного из двух цветов. Пусть этот узел имеет первый цвет. Найдем на прямой l узел второго цвета и получаем прямоугольный треугольник с вершинами трех цветов (и горизонтальным и вертикальным катетами).
Рассмотрим третий случай. Существует горизонтальная прямая m, содержащая узлы всех трех цветов (и не существует горизонтальной прямой, узлы которой раскрашены в два цвета, иначе возвращаемся ко второму случаю). Выбираем на ней узел первого цвета (назовем его A) и проводим вертикаль через этот узел. Если

на вертикальной прямой найдется хотя бы одна точка второго цвета, искомый треугольник построен (узел второго цвета на вертикали, узел A первого цвета на пересечении вертикали и горизонтали, узел третьего цвета существует и выбирается на прямой m). Показанный способ выбора трех вершин невозможен только при одном условии - любая вертикальная прямая содержит только узлы одного цвета. Но это соответствует первому рассмотренному случаю (только горизонтальное направление изменилось на вертикальное). Проведем такое построение еще раз. Проводим через узел A две взаимно перпендикулярные прямые по диагональным линиям. Так как на прямой m существуют узлы двух оставшихся цветов, то существуют две вертикальные прямые, все узлы которых имеют один определенный цвет, одна прямая второго цвета, и одна прямая третьего цвета. Каждая из двух проведенных диагональных прямых пересечет эти две вертикальные прямые в узлах. Получим один узел второго цвета и один узел третьего цвета на перпендикулярных лучах (катетах), выходящих из вершины первого цвета.
Итак, для любого возможного случая раскраски всех горизонтальных прямых мы показали существование прямоугольного треугольника с раскраской вершин в три цвета.