



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/2020 гг.  
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
МАТЕМАТИКА  
8 КЛАСС

1. Квадрат  $2019 \times 2019$  разбит двумя горизонтальными и двумя вертикальными линиями на 9 прямоугольников. Стороны центрального прямоугольника равны 1511 и 1115. Найдите сумму площадей угловых прямоугольников.
2. В ряд выписали числа от 1 до 2019. Каких цифр выписали больше: единиц или двоек и на сколько?
3. Длина дороги от Столицы до города **О** 2020 километров. Вдоль дороги – километровые столбы. На первом столбе с лицевой стороны написано 1, с обратной – 2019; на втором – 2 и 2018 ..., на последнем – 2019 и 1. Столб называется *хорошим*, если у двух написанных чисел есть общий делитель, отличный от 1, иначе – *нехорошим*. Сколько вдоль этой дороги нехороших столбов?
4. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . При этом  $AB=OD$ ,  $AD=OC$ , и углы  $BAC$  и  $BDA$  тоже равны. Докажите, что этот четырехугольник – трапеция.
5. В одном классе учатся блондины и брюнеты. Светловолосые при ответе на любой вопрос лгут, а люди с темными волосами говорят правду. Но некоторые дети любят красить волосы и красят их каждый день в противоположный цвет! (А другие никогда не красят волосы). В понедельник у Пети был день рождения, и у всех детей спросили: «А ты родился в этом месяце?» и все 20 учеников дали утвердительный ответ. В пятницу у детей снова спросили «Ты родился в этом месяце?» и только 10 учеников дали утвердительный ответ. Когда после выходных в понедельник детей снова спросили «Ты родился в этом месяце?» уже никто не дал утвердительного ответа. А в пятницу посчитали, кого в классе больше сейчас: блондинов или брюнетов. Какой же получили ответ?
6. 15 ноября проходил турнир по игре в вышибалы. В каждой игре сталкивались две команды. За победу назначалось 15 очков, за ничью 11, а за проигрыш очков не давали. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. По окончании турнира оказалось, что суммарное количество набранных баллов равно 1151. Сколько было команд?

***Время выполнения работы – 240 минут.***



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/2020 гг.  
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
МАТЕМАТИКА  
8 КЛАСС

### Решения и критерии проверки.

1. Ответ:  $508 \cdot 904$ . Решение. Заметим, что из угловых прямоугольников организуется прямоугольник  $508 \cdot 904$ .

**Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов**. Показано, что образуется прямоугольник, но в вычислениях допущена неточность – **4 балла**. Разобран один из частных случаев разбиения – **0 баллов**.

2. Ответ. Единиц на 990 больше. Решение. От 1 до 999 их количество одинаково. От 1000 до 1999 единиц на 1000 больше. От 2000 до 2009 двоек на 10 больше. От 2010 до 2019 снова одинаково. Итого  $1000 - 10 = 990$ .

**Критерии проверки.** Полное решение – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. Ответ: 800. Решение. Заметим, что сумма двух чисел на столбе равна 2020. Если оба числа делятся на какой-то общий делитель, то и  $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$  делится на этот делитель. Все четные столбы хорошие, все делящиеся на 5 хорошие, все делящиеся на 101 хорошие. Итого нечетных столбов  $2020/2 = 1010$ . Среди них на 5 не делится  $1010 \cdot 4/5 = 808$ . Среди них на 101 не делится  $808 \cdot 100/101 = 800$  (это и есть количество всех нехороших столбов).

**Критерии проверки.** Полное решение – **7 баллов**. Указано, что делители хороших столбов – это делители числа 2020 – **1 балл**. Правильно исключена часть делителей, но не все – **до 3 баллов**. Ответ без пояснения – **0 баллов**.

4. Решение. Покажем, что треугольники ABD и DOC равны (по двум сторонам и углу между ними). Две стороны равны по условию. Угол COD – внешний для треугольника AOD, поэтому равен  $\angle CAD + \angle BDA = \angle CAD + \angle BAC = \angle BAD$ . Тогда угол ACD равен углу BDA, и прямые AB и CD параллельны. Если бы это была не трапеция, а параллелограмм, то треугольник ABD был бы равен треугольнику BCD и никак не мог бы равняться его части COD.

**Критерии проверки.** Полное решение – **7 баллов**. Пропущено доказательство того факта, что не параллелограмм – **5 баллов**. Указано, что треугольники ABD и DOC равны, но это не доказано (или доказано с ошибкой), а все остальное верно – **1 балл**.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/2020 гг.  
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
МАТЕМАТИКА  
8 КЛАСС

5. Ответ. Брюнетов больше. Решение. В пятницу дети имеют тот же цвет волос, что и в понедельник, поэтому ответы другими могут быть только в связи с тем, что сменился месяц. Значит, с пятницы до понедельника месяц точно не менялся. С пятницы до понедельника могли поменять ответ только те дети, которые красят волосы! Поэтому их 10 человек.

Рассмотрим тех, кто в первый понедельник был крашеным брюнетом. Т.к. они ответили утвердительно, они родились в 1-м месяце. И когда в следующий понедельник им задали тот же вопрос, они опять должны были дать утвердительный ответ (ведь они на тот момент были блондинами). Поэтому таких детей нет. Значит, все крашенные (10 человек) в первый понедельник были блондинами. Ко второй пятнице они станут брюнетами. В первый раз у Пети был день рождения. Он не мог быть крашеным брюнетом (таких нет), поэтому он был истинным брюнетом. Т.е. во вторую пятницу есть крашенные брюнеты (10) и как минимум 1 истинный брюнет. Брюнетов больше.

**Критерии проверки.** Полное решение – 7 баллов. Получен результат, что месяц менялся – 1 балл. Получен результат, что красят волосы 10 человек – 1 балл. Получен результат, что все, красящие волосы, красят их одинаково – 1 балл. Баллы за продвижения суммируются.

6. Ответ: 12 команд. Решение. Пусть участвовало  $N$  команд. Тогда игр было  $N(N-1)/2$ . За каждую игру суммарно зарабатывается 15 или 22 очка. Поэтому игр было не меньше 53 ( $1151/22$ ) и не больше 76 ( $1151/15$ ).

Заметим, что если команд было бы не больше 10, то игр было бы не более 45. А если команд не менее 13, то игр было бы не менее 78. Значит, команд 11 (55 игр) или 12 (66 игр). В каждой из игр 15 баллов суммарно команды набирают точно! И 7 баллов дополнительно, если была ничья. Таким образом, суммарное количество ничьих это  $(1151-55*15)/7$  (число нецелое – не могло так быть) или  $(1151-66*15)/7=23$ . Поэтому единственный вариант – было 12 команд.

**Критерии проверки.** Полное решение – 7 баллов. Получено, что команд было 11 или 12, и дальше один из случаев не отброшен – 3 балла. Обосновано, что игр было не меньше 53 и не больше 76 без дальнейшего продвижения – 2 балла. Правильный ответ с построенным примером – 2 балла. Только правильный ответ без пояснения – 0 баллов.