Муниципальный этап Российской олимпиады по математике

2019-20 учебного года

8 класс (*время решения – 4 часа*)

1. Однажды в одной физико-математической школе сентябрь объявили месяцем информационных технологий. Поэтому в сентябре в каждом классе каждый понедельник был 1 урок информатики, каждый вторник – 2 урока, каждую среду – 3 урока, каждый четверг – 4 урока, а каждую пятницу – 5 уроков информатики. По субботам и воскресеньям в этой школе выходные. 1 сентября в школе проходили торжественные линейки, поэтому никаких уроков не было. Известно, что за весь сентябрь в каждом классе прошло 64 урока информатики. На какой день недели в тот год пришлось 1 сентября? Всего в сентябре 30 дней.

Ответ: среда.

Решение. В течении 1 полной недели проходит 1+2+3+4+5 = 15 уроков. Со 2 сентября по 29 сентября (28 дней) пройдет 4 полных недели, то есть 60 уроков. Значит 30 сентября было 64–60=4 урока, то есть это был четверг. Значит, четвергами были 23, 16, 9 и 2 сентября, а 1 сентября было средой.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Замечено, что в течении 1 полной недели проходит 15 уроков, но дальнейших продвижений нет или в них ошибка – 2 балла. За ответ с проверкой (что ответ «среда» подходит) без доказательства, что другими днями недели 1 сентября быть не могло – не более 3 баллов.

2. На столе стоят 2 свечи, каждая длиной 20 см, но разного диаметра. Свечи горят равномерно, при этом тонкая свеча сгорает полностью за 4 часа, а толстая – за 5 часов. Через какое время тонкая свеча станет в 2 раза короче толстой, если их зажечь одновременно?

Ответ: 3 часа 20 минут (3 1/3 часа).

Решение 1. За 1 час тонкая свеча сгорает на 20/4=5 см, а толстая – на 20/5 = 4 см. Спустя t часов длина тонкой свечи станет равна 20–5t, а толстой – 20–4t. Исходя из условия получаем уравнение 20–4t = 2*(20–5t), откуда 6t=20, t=10/3 часа = 3 часа 20 минут.

Решение 2. Изначально разница длин свеч была равна 0, а длина тонкой свечи – 20 см. Тонкая свеча горит быстрее, то есть разница длин будет постепенно увеличиваться. При этом длина тонкой свечи, естественно, будет постепенно уменьшаться. Нас интересует момент, когда разница длин станет равна длине тонкой свечи. Через 3 1/3 часа тонкая свеча сгорит на 20 / 4 * (3 1/3) = 50/3 см, то есть от нее останется 10/3 см. За это же время толстая свеча сгорит на 20 / 5 * (3 1/3) = 40/3 см, то есть от нее останется 20/3 см. То есть спустя 3 1/3 часа разница длин как раз будет равна длине тонкой свечи. Как было сказано выше, разница длин постоянно увеличивалась, поэтому до этого момента разница длин была меньше 10/3 см, а тонкая свеча имела длину больше 10/3 см. То есть до этого момента равенства быть не могло.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Если задача решается «подбором» (есть проверка, что 3 1/3 часа подходит, при этом, возможно, рассмотрено несколько других *конкретных* значений времени горения), при этом нет рассуждений, что других ответов не существует (как, например, это сделано в решении 2) – 3 балла. За арифметические ошибки (например, при решении уравнения) – снижать оценку на 1-2 балла.

3. В колонии амёб каждая амёба каждый час мутирует. Если амёба имела m ложноножек и n ядер до мутации, то после будет иметь $2m - n$ ложноножек и $2n - m$ ядер. Если количество ложноножек или ядер у амёбы становится отрицательным, она погибает. Докажите, что рано или поздно в колонии останутся в живых только те амебы, у которых количество ложноножек было изначально равно количеству ядер.

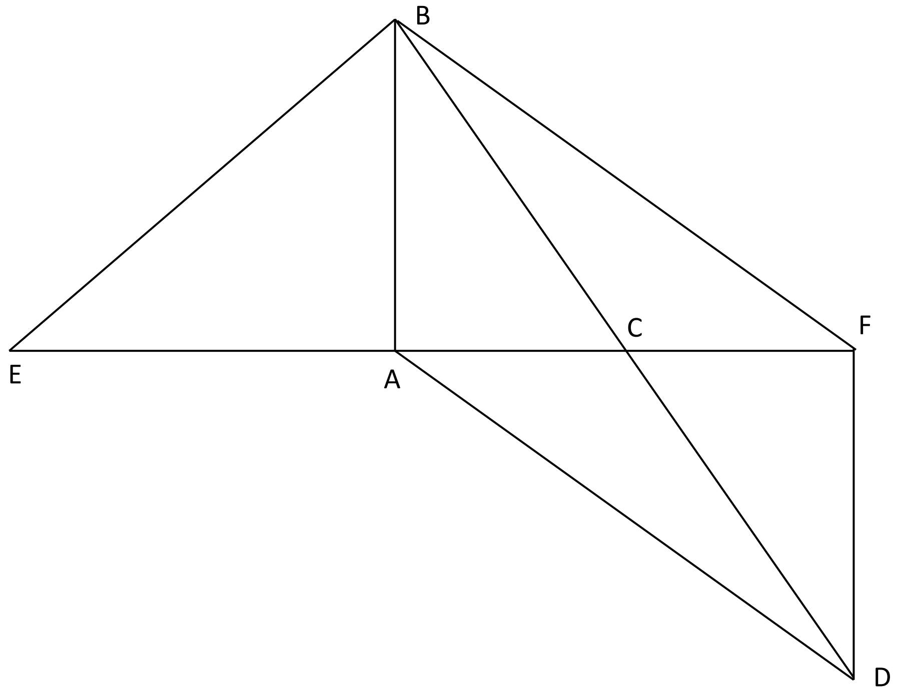
Решение. Сравним количество ложноножек и ядер до и после мутации. Пусть до мутации у амебы было m ложноножек и n ядер, причем $m>n$. Тогда после мутации количество ложноножек будет равно $2m - n = m + (m - n) > m$ (поскольку $m>n$ и, следовательно, $m - n > 0$). При этом количество ядер будет равно $2n - m = n + (n - m) < n$. То есть количество ложноножек было больше количества ядер и увеличилось, а количество ядер уменьшилось. То есть при любой мутации такой амебы у нее по-прежнему число ложноножек будет больше числа ядер, и число ядер при каждой мутации будет уменьшаться. Очевидно, что через некоторое количество мутаций это количество станет отрицательным, и амеба погибнет. Аналогично рассматривается случай $m < n$. В случае $m = n$ имеем, что после мутации: $2m - n = 2n - n = n$ и $2n - m = 2n - n = n$. То есть количество ложноножек и ядер никогда не изменится, поэтому амеба никогда не погибнет.

Таким образом, через некоторое время в живых останутся те и только те амебы, для которых изначально $m = n$.

Критерии. Доказано, что при $m = n$ амеба никогда не погибнет – 2 балла. Доказано, что при $m > n$ (или $m < n$) амеба рано или поздно погибнет – 5 баллов.

4. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C отметили точку D такую, что CD = BC, а на продолжении стороны CA за точку A отметили точку E такую, что AE = 2CA. Докажите, что если AD = BE, то треугольник ABC прямоугольный.

Решение. Продолжим сторону AC за точку C и отметим на продолжении точку F такую, что CF = AC. Тогда ΔFBC = ΔADC по двум сторонам и углу между ними (FC = AC по построению, BC = DC по условию, $\angle$FCB = $\angle$ACD как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что BF = AD. Но по условию AD = BE, значит BF = AD = BE.Значит, ΔEBF является равнобедренным, и BA в нём является медианой (AE = 2CA по условию и AF = AC + CF = AC + AC = 2AC). Значит, BA является и высотой, то есть $\angle BAF = \angle BAC = 90^0$.



Критерии. Выполнено дополнительное построение, аналогичное построению т. F в решении, и доказано, что BF = BE – 3 балла.

5. На острове живут 217 жителей, из них 17 – рыцари, а остальные 200 – хитрецы. Однажды на остров приехал частный детектив и решил узнать, кто есть кто. Для этого он попросил каждого жителя написать список из 200 человек, кого они считают хитрецами. Детектив не знает, кто какой список составил, но знает, что рыцари честно написали в списке 200 настоящих хитрецов, а хитрецы могли написать в списке любых жителей острова (включая себя). Всегда ли детектив может на основе полученных списков выявить по крайней мере 13 жителей, которые точно являются хитрецами? У всех жителей острова разные имена, поэтому написанному в списке имени всегда однозначно соответствует один житель острова.

Ответ. Да, может всегда.

Решение. Объединим одинаковые списки в группы. Назовём группу *важной*, если в ней не менее 17 списков. Заметим, что количество *важных* групп не больше 12 (т.к. в противном случае жителей не меньше, чем 13*17=221, что больше 217).

Поскольку у всех рыцарей должен был получиться один и тот же список (все написали одних и тех же хитрецов), списки всех рыцарей попали в одну группу.

Поскольку рыцарей 17, в этой группе не менее 17 списков, то есть она *важная*. Таким образом, в одной из важных групп перечислены все хитрецы.

Докажем, что есть по крайней мере 13 жителей, которые перечислены во всех важных группах. Будем отмечать людей, *не* перечисленных в важных группах. В каждой группе *не* перечислены только 17 жителей острова. Тогда, поскольку важных групп не больше 12, всего будет отмечено не более, чем 17*12=204 жителя. Остальные не менее, чем 13 жителей отмечены не будут, значит они перечислены во всех важных группах. Независимо от того, в какой именно из важных групп находятся списки рыцарей, эти 13 жителей точно являются хитрецами.

Итак, для обнаружения хитрецов частный детектив должен объединить одинаковые списки в группы и найти 13 имён, встречающихся во всех важных (содержащих не менее 17 списков) группах.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрение только отдельных частных случаев (например, что все жители написали настоящих хитрецов) – 0 баллов. В решении присутствует идея объединения одинаковых списков в группы и выделения групп мощностью 17 и более списков (но дальнейших продвижений нет) – 1 балл.