Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

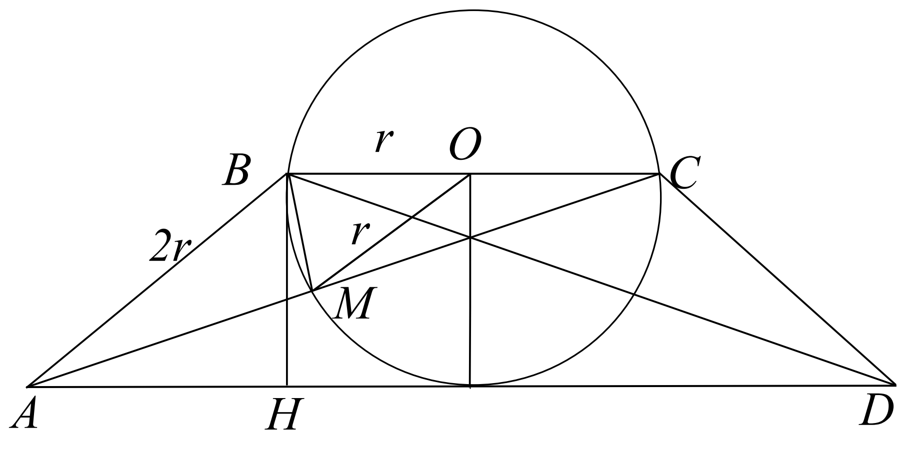
**2019-2020 уч.год**

9 класс

Решения и ответы

1. Большая карусель представляет собой фигурки сказочных зверей, движущихся по кругу друг за другом, на которых можно кататься. По десять учеников 6а, 6б, 6в классов и по пять учеников 7а и 7б классов разместились на карусели, заняв все места. Оказалось, что никакие два шестиклассника из разных классов не сидят друг за другом подряд. Докажите, что найдутся три шестиклассника из одного класса, разместившиеся на карусели друг за другом.
*Решение.*
Вначале заметим, что если нашлось четыре и более шестиклассника из одного класса, сидящих друг за другом, то, тем самым, нашлось три таких шестиклассника.
Пусть не нашлось ни одной указанной тройки шестиклассников. Это значит, что все шестиклассники из одного класса сидят по одному и по два подряд. По условию задачи, такие единичные или парные шестиклассники разделены семиклассником (иначе два шестиклассника из разных классов сидели бы друг за другом). Наименьшее количество разделителей-семиклассников потребуется, если все шестиклассники сидят последовательно попарно. Всего пар будет пятнадцать (по пять на класс), и на круговой карусели потребуется пятнадцать разделителей. Но у нас всего десять семиклассников, поэтому мы получаем противоречие с предположительной рассадкой, и существует хотя бы одна тройка шестиклассников одного класса, разместившихся друг за другом.

2. $ABCD$ – трапеция с основаниями $AD$ и $BC$, такая, что можно построить окружность с диаметром $BC$, проходящую через середины диагоналей $AC$ и $BD$, и касающуюся $AD$. Найдите углы трапеции.
*Решение.*




*Первый способ.* Пусть точка $M$ – середина диагонали $AC$, точка $O$ – центр окружности и середина основания $BC$. В треугольнике $ABC$ отрезок $MO$ – средняя линия, т.е. он параллелен боковой стороне $AB$ трапеции и равен половине этой стороны. Так как длина $MO$ равна радиусу $r$ окружности (точка $M$ по условию лежит на

окружности), то $AB = 2r$. Опустим высоту $BH$ из точки $B$. Катет $BH$ вдвое короче гипотенузы $AB$, следовательно, угол $BAD$ равен 30°. Тогда угол $ABC$ равен 150°. Аналогичные рассуждения про середину диагонали $BD$ приводят к результату $\angle ADC = 30°, \angle DCB = 150°$.
*Второй способ.* Заметим, что треугольник $BMC$ прямоугольный, так как его вершина лежит на окружности, а основание – диаметр. Поэтому $BM$ – высота в треугольнике $ABC$, а, так как по условию этот отрезок является медианой, то треугольник $ABC$ равнобедренный. В прямоугольном треугольнике $ABH$ гипотенуза равна $2r$, и катет $BH$ равен $r$. Получаем, что угол $BAD$ равен 30°. Тогда угол $ABC$ равен 150°. Аналогичные рассуждения про середину диагонали $BD$ приводят к результату $\angle ADC = 30°, \angle DCB = 150°$.
*Ответ.* $30°, 150°, 150°, 30°$

3. Найдите все решения уравнения

$$n^6 + 3n^5 + 3n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$

где $m, n$ – целые числа.
*Решение.*
Преобразуем левую часть уравнения

$$n^6 + 3n^5 + 3n^4 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$

$$n^3(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$

$$n^3(n+1)^3 + (n+1)^3 = m^3$$

$$(n^3+1)(n+1)^3 = m^3$$

Произведение целых чисел слева является кубом $m^3$, значит, каждое из этих чисел является кубом, или одно из них равно 0. В первом случае получаем, что два последовательных натуральных числа, $n^3$ и $n^3+1$, являются кубами. Но два последовательных числа являются кубами только в том случае, если это 0 и 1 или $-1$ и 0. Получаем варианты $n = -1$ или $n = 0$, проверяем подстановкой, вычисляем $m$ и составляем ответ. Во втором случае, когда один из множителей слева 0, снова возвращаемся к ответу $n = -1$, $m = 0$.
Приведем доказательство, что два последовательных куба – это только числа 0 и 1 или $-1$ и 0. (Считается известным фактом, в работе можно не доказывать).

$$\begin{cases} a = x^3, \\ b = y^3, \\ a - b = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x^3, \\ b = y^3, \\ x^3 - y^3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x^3, \\ b = y^3, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) = 1. \end{cases}$$

С учетом того, что $x$, $y$ целые числа, последнее произведение является произведением $1 \cdot 1$ или $(-1) \cdot (-1)$, откуда получаем $x = 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = -1$.
*Ответ.* $n = -1$, $m = 0$ или $n = 0$, $m = 1$.

4. Натуральное число $n$ таково, что число $n + 1$ делится на 8. Докажите, что сумма всех делителей числа $n$, включая 1 и само число, делится на 8.
*Решение.*
Заметим, что число $n$ дает остаток 7 при делении на 8. Пусть $n = ab$. Рассмотрим остатки от деления $a$ и $b$ на 8 и составим таблицу произведения остатков (другими

словами, рассмотрим таблицу произведений $ab$ по модулю 8).

| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 |
| **4** | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| **5** | 0 | 5 | 2 | 7 | 4 | 1 | 6 | 3 |
| **6** | 0 | 6 | 4 | 2 | 0 | 6 | 4 | 2 |
| **7** | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Изучаем таблицу и находим, что произведение, дающее в остатке 7, можно получить только в случаях $a = 8k + 1$, $b = 8l + 7$; $a = 8k + 3$, $b = 8l + 5$; $a = 8k + 5$, $b = 8l + 3$; $a = 8k + 7$, $b = 8l + 1$ ($k$, $l$ – натуральные). Поэтому те делители числа $n$, которые образуют пары, дают в сумме остаток при делении на 8, равный 0. Это же верно и в случае пары $a = 1$, $b = n$. Отсюда сумма всех делителей есть сумма всех пар делителей, а каждая пара дает сумму, делящуюся на 8.

5. Пусть $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{3ab}{c^2} > 1$$

*Решение.*
Перепишем неравенство к равносильному виду

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$

Из неравенства треугольника следует

$$a + b > c > 0$$

Обе части неравенства умножим на положительное число $(a^2 - ab + b^2)$ (оно равно 0 только при $a = b = 0$)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) > c(a^2 - ab + b^2)$$

Прибавим к обеим частям неравенства $3abc$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc$$

Преобразуем

$$a^3 + b^3 + 3abc > c(a^2 - ab + b^2 + 3ab)$$

$$a^3 + b^3 + 3abc > c(a + b)^2$$

Учтем, что

$$c(a + b)^2 > c^3$$

Получаем

$$a^3 + b^3 + 3abc > c(a + b)^2 > c^3$$