ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/2020 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

1. Три различных числа *a*, *b*, *c* выбраны так, что выполняются равенства: $a^2-bc = b^2-ac = c^2-ab$. Найдите все значения, которые может принимать величина $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.

2. Длина дороги от города Столичный до города Провинциальный ровно 2020 верст. Вдоль всей дороги установлены верстовые столбы. На первом столбе с лицевой стороны написано 1, с обратной – 2019; на втором – 2 и 2018, …, на последнем – 2019 и 1. Столб называется *хорошим*, если написанные на нём числа имеют общий делитель, отличный от 1, иначе – *нехорошим*. Сколько вдоль этой дороги нехороших столбов?

3. В Цветочном городе три избирательных участка. Незнайка два года подряд баллотировался на пост мэра. На каждом участке ежегодно подсчитывали, какой процент от всех явившихся избирателей голосовал за Незнайку. В этом году этот показатель на каждом из трёх участков оказался на 20% больше, чем в прошлом году. А в целом по городу – на 20% меньше, чем в прошлом. Приведите пример, как такое могло быть.

4. В декартовой системе координат построили прямую $y=20-x$. Через точку (19;19) провели прямые (в том числе, параллельные осям координат) так, что они разбили плоскость на углы по $9°$. Найдите число, равное сумме абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y=20-x$.

5. Вписанная окружность касается сторон *AB*, *BC*, *AC* прямоугольного треугольника *ABC* ($\angle C = 90°$) в точках C_0, A_0, B_0 соответственно. *CH* – высота треугольника *ABC*. Точка *M* – середина отрезка A_0B_0. Докажите, что $MC_0 = MH$.

6. В шахматном турнире каждый участник встречался с каждым один раз. За победу в любой партии участник получал 1 очко, ничью – 0,5 очка, поражение – 0 очков. По правилам чемпионом (или чемпионами) объявляются все участники, набравшие наибольшее количество баллов. На этот раз единоличным чемпионом стал Петя. Вася сказал: "Если из турнирной таблицы удалить любого участника и вычеркнуть очки, набранные во встречах с ним, то Петя уже не будет чемпионом". Может ли Вася быть прав? Обоснуйте свой ответ.

Время выполнения работы – 240 минут.

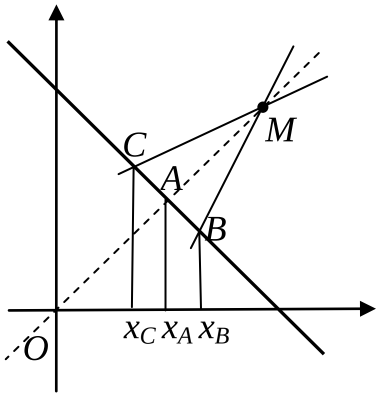
Решения и критерии проверки.

1. **Ответ:** –3. **Решение.** Преобразуем первое равенство $a^2–bc = b^2–ac$. Получим $a^2-b^2+c(a-b)=0 \Rightarrow (a-b)(a+b+c)=0$. Так как числа различны, то $a \neq b$, значит $a+b+c=0$. Но тогда дробь $\frac{a}{b+c}=-1$, аналогично $\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=-1$. Второе равенство $b^2–ac = c^2–ab$ аналогично преобразуем к виду $b^2-c^2+a(b-c)=0 \Rightarrow (b-c)(a+b+c)=0$, откуда также получаем, что $a+b+c=0$. Таким образом, сумма $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=-3$.
   Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Рассмотрено только одно из двух равенств, все преобразования выполнены верно, получен верный ответ. Но проверка, что найденное соотношение между числами удовлетворяют второму равенству, отсутствует – **3 балла.** Все преобразования выполнены верно, но в решении не использовано, что все числа различны, и получено три ответа: –3; 1,5; –1,5 – **4 балла.** В остальных случаях – **0 баллов**.

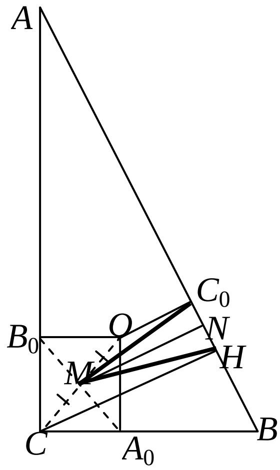
2. **Ответ:** 800. **Решение.** Заметим, что сумма двух чисел на каждом столбе равна 2020. Если оба числа делятся на какое-то число, отличное от 1, то и 2020 делится на это же число. $2020=2^2\times5\times101$.Тогда столб является нехорошим, если, например, первое число на нем не делится ни на 2, ни на 5, ни на 101. Нечетных столбов 2020/2=1010. Среди них на 5 не делится 1010×4/5=808. Среди них на 101 не делится 808×100/101=800.

   Критерии проверки. Верное решение –**7 баллов**. Ход рассуждений верный, но допущена арифметическая ошибка или получен ответ не на тот вопрос – **5 баллов**. Сделано верное умозаключение, что сумма чисел на верстовых столбах равна 2020, но дальнейших продвижений нет – **1 балл**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. **Решение.** Пусть на первом и втором участках в первый год явилось по 10 избирателей, а во второй – по 100. А на третьем – в первый год 100, а во второй 40. А процентов соответственно сначала 10, 10 и 70, а потом 30, 30 и 90. Тогда по городу процент был 72:120 = 60%, а потом (60 + 36):(200 + 40) = 40%.
   Критерии проверки. Любой верный пример, подтвержденный вычислениями – **7 баллов.** Верный пример без проверки – **3 балла.** В остальных случаях – **0 баллов**.



4. **Ответ.** 190. **Решение 1.** Среди прямых, пересекающих $y = 20 - x$, есть прямая $y = x$. Причем картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (19;19) проведено 180:9=20 прямых, из них 19 пересекают прямую $y = 20 - x$. Для каждой точки на прямой $y = 20 - x$ сумма координат равна 20, значит сумма абсцисс и ординат всех точек равна $20 \cdot 19 = 380$, тогда сумма абсцисс – вдвое меньше и равна 190.



Решение 2. Через точку (19;19) проведено 180:9=20 прямых, из них 19 пересекают прямую $y = 20 - x$. Пусть прямая $y = x$ пересекает прямую $y = 20 - x$ в точке A, тогда x_A=10. Остальные 18 прямых разбиваются на пары, пересекающие прямую $y = 20 - x$ в симметричных точках B и C (треугольники MAB и MAC равны по катету и острому углу). Тогда $x_B + x_C = 2x_A = 20$. Сумма абсцисс всех точек пересечения равна $10+9 \cdot 20=190$.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов.** Допущена ошибка при подсчете количества прямых, проходящих через точку (19;19): 360:9=40, все остальные рассуждения верные – **4 балла.** Обосновано, что картинка симметрична относительно прямой $y = x$, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

5. **Решение.** Пусть точка O – центр вписанной окружности треугольника. Тогда её радиусы OA_0, OB_0, OC_0 перпендикулярны соответственным сторонам. Значит, четырехугольник OA_0CB_0 является квадратом и середина его диагонали A_0B_0 является одновременно серединой диагонали OC. Четырехугольник $OCHC_0$ является прямоугольной трапецией. Проведем её среднюю линию MN, она параллельна основаниям. Тогда медиана MN треугольника C_0MH является высотой, значит $MC_0 = MH$.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов.** Установлено, что точка M является серединой отрезка CO, но дальнейших продвижений нет – **1 балл.** В остальных случаях – **0 баллов**.

6. **Ответ.** Нет. **Решение.** Сейчас Петя единоличный чемпион, т.е. опережает любого другого участника минимум на пол-очка. Если при вычеркивании кого-либо Петя теряет из своей суммы пол-очка, то он все равно остается чемпионом, возможно, не единоличным (так как даже если никто больше

ничего не потерял, то Петя всего лишь сравнялся баллами с кем-то). Следовательно, при вычеркивании любого участника Петя должен терять 1 очко, т.е. он выиграл всех, но это означает, что при вычеркивании любого участника окажется, что Петя выиграл всех остальных, а любой другой проиграл хотя бы одному (а именно Пете). Поэтому Петя все равно останется чемпионом.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов.** Обосновано, что при вычеркивании любого участника Петя должен терять 1 очко, но дальнейших продвижений нет – **1 балл.** В остальных случаях – **0 баллов**.