Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2019-20 учебного года
9 класс ***(Время решения – 4 часа)***

1. На дороге между городами А и Б в некоторых местах стоят столбы, и на каждом столбе написаны два числа: сколько километров от столба до города А, и сколько километров от столба до города Б. Турист, идущий из одного города в другой, увидел столб, на котором одно из чисел было втрое больше другого. Пройдя от первого столба 40 километров, он снова увидел столб, на котором одно из чисел было втрое больше другого. Турист прошёл ещё 10 километров, и снова увидел столб. Чему равно отношение большего из чисел на этом столбе к меньшему?

   Ответ. 7.

   Решение. Без ограничения общности можно считать, что турист увидел первый столб, когда был ближе к городу А. Пусть расстояние от первого столба до А равно x километров, тогда расстояние от него до Б — $3x$. Если на втором столбе написаны числа y и $3y$, то $x + 3x = y + 3y$, так как сумма чисел на столбах равна расстоянию между городами. Значит $x = y$, то есть на первом и втором столбах написаны одинаковые пары чисел. После 40 километров расстояния не могли сохраниться, значит они поменялись местами. Поэтому турист стал дальше от города А на $3x-x = 2x$, то есть $2x = 40$, $x = 20$. Значит на третьем столбе написаны числа $60 + 10 = 70$ и $20 - 10 = 10$, и их отношение равно 7.

   Комментарий. Только ответ — 1 балл.

   Описана числовая конфигурация, при которой будет правильный ответ — 2 балла.

   Замечание. Решение, содержащее только ответ (даже если объяснено, почему он достижим), не может быть полным. Необходимо объяснить, почему других вариантов ответа не может быть.

2. Про 7 действительных чисел известно, что сумма любых 3 из них меньше суммы оставшихся 4. Докажите, что все эти числа положительны.

   Первое решение. Выпишем числа из условия по неубыванию $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7$. По условию $a_5+a_6+a_7 < a_1+a_2+a_3+a_4$, значит $a_1 > (a_7-a_4)+(a_6-a_3)+(a_5-a_2)$. Так как каждая из скобок неотрицательна, то $a_1 > 0$. Так как все остальные числа не меньше a_1, все они заведомо положительны.

   Второе решение. Пусть сумма всех чисел равна s. Выберем из данных 7 чисел любое число a, а остальные разобьём на две тройки с суммой чисел в каждой из троек x и y. По условию $x < s - x$ и $y < s - y$, значит $x + y < 2s - x - y$, $x + y < s$, $s - a < s$, $a > 0$. Так как a выбрано произвольно, утверждение задачи доказано.

3. Найдите такое наименьшее действительное число x, что 45% от x и 24% от x — натуральные числа.

   Ответ. $\frac{100}{3}$.

   Первое решение. Так как $\frac{45}{100}x$ натуральное, то x — рациональное положительное число. Пусть $x = \frac{m}{n}$, при этом дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Числа $\frac{45}{100}\cdot\frac{m}{n} = \frac{9m}{20n}$ и $\frac{24}{100}\cdot\frac{m}{n} = \frac{6m}{25n}$ целые, значит $9m$ делится на n, и так как m и n взаимно просты, то 9 делится на n. Отсюда следует, что либо $n = 1$, либо $n = 3$, либо $n = 9$. Так как 9 и 20 взаимно просты, $9m$ делится на 20, то m делится на 20.

   Так как $6m$ делится на n, m и n взаимно просты, то 6 делится на n. Так как $6m$ делится на 25, 6 и 25 взаимно просты, то m делится на 25. Значит $n \leqslant 3$ (остаются только варианты $n = 3$ и $n = 1$), и m делится на 100, то есть $m \geqslant 100$. Итак, $x \geqslant \frac{100}{3}$, и $x = \frac{100}{3}$ подходит, так как $\frac{45}{100}x = 15$ и $\frac{24}{100}x = 8$.

Второе решение. Заметим, что x должно быть положительным, иначе любые проценты от него будут неположительны, и не могут равняться натуральному числу. Пусть натуральные числа a и b — соответственно 45% от x и 24% от x. Тогда целое число $c = 2b - a$ будет $2 \cdot 24 - 45 = 3$ процентами от x. Так как 3% от x положительное число, то $c \geqslant 1$, но тогда $x = \frac{100}{3}c \geqslant \frac{100}{3}$. Число $x = \frac{100}{3}$ подходит, так как $\frac{45}{100}x = 15$ и $\frac{24}{100}x = 8$.

Комментарий. Только ответ — 2 балла.

4. Все клетки бесконечной клетчатой плоскости — квадраты со стороной 1. Каждый узел сетки этой плоскости покрашен в один из двух цветов, причём есть узел каждого из цветов. Докажите, что найдутся два узла разного цвета, расстояние между которыми равно 5.

   Решение. Допустим противное, тогда любые два узла на расстоянии 5 друг от друга одноцветны. Пусть узлы покрашены в синий и красный цвета. Введём систему координат, выбрав за оси две произвольные перпендикулярные линии сетки. Расстояние между парами точек $(0, 0)$ и $(3, 4)$, $(3, 4)$ и $(6, 0)$, $(6, 0)$ и $(1, 0)$ равно 5. Поэтому если точка $(0, 0)$ синяя, то и $(3, 4)$, $(6, 0)$ и $(1, 0)$ должны быть синими.

   Аналогично доказывается, что все узлы $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, -1)$ будут синими. Значит если узел синий, то и все 4 узла, в которые можно из него попасть, пройдя на 1 вдоль линий сетки, будут синими. Так как из узла $(0, 0)$ можно несколькими такими сдвигами попасть в любой узел, то все узлы синие. Но это противоречит тому, что есть узел другого цвета.

   Комментарий. Доказано, что если допустить отрицание утверждения задачи, то два соседних узла (на расстоянии 1) одноцветны — 4 балла.

5. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD выбраны точки N и F соответственно. Докажите, что если $\angle BAF = \angle CDN$, то $\angle AFB = \angle DNC$.

   Первое решение. Так как углы NAF и FDN равны, опираются на NF, и лежат по одну сторону от NF, то четырёхугольник $ANFD$ вписанный. Поэтому $\angle NFC = 180° - \angle NFD = \angle BAD = 180° - \angle ABC$, где последнее равенство следует из параллельности прямых AD и BC. Таким образом $\angle NBC + \angle NFC = 180°$, то есть четырёхугольник $NBCF$ вписанный. Из его вписанности следует, что $\angle NBF = \angle NCF$. Осталось заметить, что $\angle AFB = 180° - \angle BAF - \angle NBF = 180° - \angle CDN - \angle NCF = \angle DNC$.

   Второе решение. Пусть продолжения боковых стороны трапеции пересекаются в точке T. Треугольники AFT и DNT подобны по двум углам ($\angle TAF = \angle TDN$ и угол T общий), значит $\frac{AF}{ND} = \frac{AT}{TD}$. Так как $BC \parallel AD$, треугольники ATD и BTC подобны, значит $\frac{BT}{AT} = \frac{TC}{TD}$, $\frac{BT}{TC} = \frac{AT}{TD}$. Из теоремы Фалеса следует, что $\frac{TB}{TC} = \frac{BA}{CD}$, значит $\frac{AF}{ND} = \frac{AT}{TD} = \frac{BT}{TC} = \frac{BA}{CD}$. Получаем, что треугольники ABF и DCN подобны ($\angle BAF = \angle CDN$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{ND}$), значит $\angle AFB = \angle DNC$.

   Комментарий. Доказано, что четырёхугольник $NBCF$ вписанный — 3 балла.