

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2019-2020 уч.год
10 класс

1. На шахматную доску 8×8 выкладывают фишки по следующему правилу. Первоначально доска пустая. Ход состоит в том, что на любое свободное поле ставится фишка. Этим же ходом ровно одна из фишек, оказавшихся с ней на соседнем поле, снимается с доски (если имеется такая соседняя фишка). Какое наибольшее количество фишек может расположиться на доске, с учетом указанного правила? Соседними полями считаются ближайшие по горизонтали, вертикали и диагонали.
2. $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трехчлены, у каждого из которых старший коэффициент равен 1. Известно, что трехчлен $h(x) = f(x) + g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x) = g^3(x) + g^2(x)$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.
3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC соответственно в точках F и G . Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб.
4. В некоторой стране 47 городов. В каждом городе есть автовокзал, из которого ходят автобусы в другие города страны и, возможно, за границу. Путешественник изучил расписание и определил для каждого города число внутренних автобусных линий, выходящих из него. Оказалось, что если не рассматривать город Озерный, то для каждого из остальных 46 городов число внутренних линий, выходящих из него, отличается от числа линий, выходящих из других городов. Найдите, со сколькими городами страны имеет прямое автобусное сообщение город Озерный.
Число внутренних автобусных линий для данного города – это число городов своей страны, в которые можно доехать из данного города на прямом автобусе, без пересадок. Линии симметричны: если из города A можно доехать до города B , то и из города B можно доехать до города A .
5. Найдите все такие натуральные числа $n \geq 2$, что $20^n + 19^n$ делится на $20^{n-2} + 19^{n-2}$.