Возможные решения

7 класс

Задача 1. Большой адронный коллайдер (БАК)

Период вращения протонов в кольце коллайдера (время одного оборота) равен $T = L/c = 90$ мкс. Наибольшее время однократного пребывания во Франции (56 мкс по условию) больше половины периода. Следовательно, больше половины окружности целиком находится во Франции, а все пересечения границ сосредоточены на части окружности, длина которой меньше $L/2$.

Предположим, что протоны вращаются против часовой стрелки. Введём обозначения: X и Z — длины участков кольца, находящихся в Швейцарии, а Y и Q — во Франции (рис. 7).

Рис. 7

Тогда, согласно условию задачи:

$$\begin{cases} X + Y = ct_1, \\ Y + Z = ct_2, \\ Q = ct_3, \\ X + Y + Z + Q = L. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$X = L - ct_2 - ct_3,$$
$$Z = L - ct_1 - ct_3.$$

Окончательно:

$$\frac{X + Z}{L} = 2 - \frac{c(2t_3 + t_2 + t_1)}{L} = 0{,}27.$$

Задача 2. Жуки

На систему «соломинка + жуки» действуют сила тяжести соломинки Mg, силы реакции опор N_1 и N_2 и силы тяжести жуков m_1g и m_2g. Правило моментов для системы относительно точки 1 имеет вид:

$$m_1gl_1 + N_2l_2 = m_2g(l_2 + l_3) + Mg\left(\frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} - l_1\right).$$

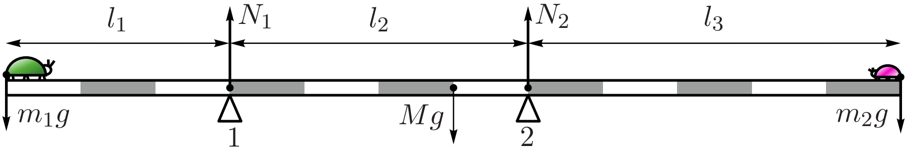

Рис. 8

Тогда:

$$N_2 = \frac{m_2g(l_2 + l_3) + Mg \cdot (l_2 + l_3 - l_1)/2 - m_1gl_1}{l_2} = 15\ \text{мН}.$$

Реакцию опоры в точке 1 в начальный момент времени можно найти из равенства нулю суммы всех сил, действующих на соломинку, или записав правило моментов относительно точки 2:

$$N_1 = \frac{m_1 g(l_1 + l_2) + Mg \cdot (l_1 + l_2 - l_3)/2 - m_2 g l_3}{l_2} = 65 \text{ мН}.$$

Для произвольного момента времени силы реакций опор равны:

$$n_1(t) = \frac{m_1 g(l_1 + l_2 - v_1 t) + Mg \cdot (l_1 + l_2 - l_3)/2 - m_2 g(l_3 - v_2 t)}{l_2};$$
$$n_2(t) = \frac{m_2 g(l_2 + l_3 - v_2 t) + Mg \cdot (l_2 + l_3 - l_1)/2 - m_1 g(l_1 - v_1 t)}{l_2}.$$

Полученные уравнения удобно записать в следующем виде:

$$n_1 = N_1 + \frac{g}{l_2}(m_2 v_2 - m_1 v_1)t;$$
$$n_2 = N_2 - \frac{g}{l_2}(m_2 v_2 - m_1 v_1)t.$$

С учётом численной подстановки реакция опоры в точке 1 увеличивается со временем, а в точке 2 — уменьшается. Отрыв и опрокидывание соломинки произойдёт через время $t_к$, когда сила реакции n_2 обратится в ноль:

$$n_2(t_к) = N_2 - \frac{g}{l_2}(m_2 v_2 - m_1 v_1)t_к = 0,$$
$$t_к = \frac{N_2 l_2}{g(m_2 v_2 - m_1 v_1)} = 4 \text{ с}.$$

Для ответа на третий вопрос найдём время встречи жуков t_0:

$$t_0 = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{v_1 + v_2} = 4{,}8 \text{ с}.$$

Можно заметить, что время встречи больше времени $t_к$. Найдем расстояние x от левого края соломинки до места встречи:

$$x = v_1 t_0 = 4{,}8 \text{ см} < l_1.$$

Следовательно, место встречи находится левее точки 1. Чтобы в этот момент соломинка не опрокинулась, момент её силы тяжести должен быть не меньше момента сил тяжести жуков:

$$M_0 g \left(\frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} - l_1 \right) \geqslant (m_1 + m_2) g (l_1 - x),$$

$$M_0 \geqslant \frac{2(m_1 + m_2)(l_1 - x)}{l_2 + l_3 - l_1} = 1{,}4 \text{ г.}$$

Задача 3. Фиолетовые смеси

Масса жидкости в первой колбе равна сумме масс смешанных жидкостей:

$$\rho_1 \left(\frac{V}{2} + \frac{V}{4} \right) = \frac{4}{3} \rho \cdot \frac{3}{4} V = \frac{V}{2} \rho + \frac{V}{4} \rho_x,$$

откуда $\rho_{\text{x}} = 2\rho$.

Пусть объём синей жидкости во второй колбе равен V_2, а объём красной — αV_2. Тогда:

$$\rho_2 = \frac{5}{4} \rho = \frac{V_2 \rho + \alpha V_2 \cdot 2\rho}{(1 + \alpha) V_2},$$

откуда следует $\alpha = 1/3$.

Найдём зависимость плотности смеси в третьей колбе от её объёма:

$$\rho_3 = \frac{\left(\frac{V}{2} - V_2 \right) \rho + \left(\frac{V}{4} - \alpha V_2 \right) \cdot 2\rho}{U},$$

причём $\frac{V}{2} - V_2 + \frac{V}{4} - \alpha V_2 = U$, откуда:

$$\rho_3 = \left(\frac{5}{4} + \frac{V}{16U} \right) \rho.$$

Так как $0 < V_2 < V/2$ (раньше может закончиться синяя жидкость), $V/12 \leqslant U < 3V/4$. Окончательно:

$$\frac{4}{3} \rho < \rho_3 \leqslant 2\rho.$$

Задача 4. Требуйте долива!

Обозначим символом T силу натяжения нити, удерживающей ведёрко. Тогда сила натяжения нити, прикреплённой к оси нижнего подвижного блока, равна $4T$. Значит, суммарная сила тяжести Mg подвешенной системы уравновешивается силой $5T$:

$$Mg = 5T.$$

Если масса системы изменится на Δm, то независимо от того, куда долили воду, изменение силы натяжения составит:

$$\Delta T = \frac{1}{5}\Delta mg.$$

Добавочная сила давления воды на дно сосуда связана с изменением силы натяжения нити соотношением:

$$\rho g \Delta H S = 4\Delta T,$$

где ΔH — изменение высоты уровня воды в сосуде. Следовательно,

$$\Delta H = \frac{4}{5}\frac{\Delta m}{\rho S}$$

независимо от того, куда доливают воду (вопросы 1–3).

По условию (вопрос 4) глубина погружения ведёрка не изменилась, поэтому не изменились объём его погруженной в воду части и действующая на него сила Архимеда. Ведёрко находится в покое, то есть изменение силы натяжения нити $\Delta T = \Delta mg/5$ связано только с увеличением массы воды в ведёрке, из чего следует, что в ведёрко необходимо налить $\Delta m/5$ воды.