

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 8.1

Время движения Васи без сена:

$$t_0 = \frac{L}{v} = \frac{Lm_0^2}{\beta},$$

следовательно,

$$\beta = \frac{Lm_0^2}{t_0} = 6250 \text{ м} \cdot \text{кг}^2/\text{с}.$$

Пусть мальчик переносит сено порциями массой  $\mu$  за каждый заход. Тогда время переноса одной порции сена из овина в сарай равно:

$$t_{11} = \frac{L(m_0 + \mu)^2}{\beta}.$$

Затем Васе нужно вернуться обратно в овин. Это займет у него время:

$$t_{12} = \frac{Lm_0^2}{\beta}.$$

Откуда время, требуемое для переноса одной порции равно:

$$t_1 = \frac{L(2m_0^2 + 2m_0\mu + \mu^2)}{\beta}.$$

Васе нужно совершить  $N = M/\mu$  заходов. Поэтому время переноса всего сена равно:

$$T = Nt_1 = \frac{LM}{\beta} \left( \frac{2m_0^2}{\mu} + 2m_0 + \mu \right).$$

Чтобы найти минимум этого времени выделим в скобках полный квадрат:

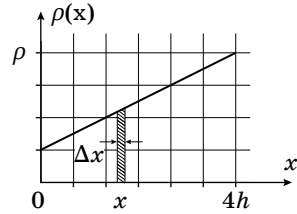
$$T = \frac{LM}{\beta} \left( \left( \frac{\sqrt{2}m_0}{\sqrt{\mu}} - \sqrt{\mu} \right)^2 + 2m_0(\sqrt{2} + 1) \right).$$

Следовательно, при  $\mu = \sqrt{2}m_0$  время минимально. Значит ему нужно сойти  $N = M/\mu = M/\sqrt{2}m_0 = 8,49$  раз. Так как число заходов целое, проверим, какое время займут 8 и 9 заходов с порциями  $\mu_1 = 75 \text{ кг}$  и  $\mu_2 = 66,7 \text{ кг}$  соответственно. Эти времена оказываются одинаковыми и равными  $T_{\min} = 2320 \text{ с} = 38 \text{ мин } 40 \text{ с}$ . Для реализации минимального времени возможны две стратегии.

**Задача 8.2**

Найдем зависимость плотности жидкости в правом сосуде от координаты  $x$ . Так как плотность изменяется линейно:  $\rho(x) = ax + b$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  можно найти из уравнений:  $\rho(0) = \rho/4 = b$  и  $\rho(h) = \rho = b + 4ah$ . Получаем, что  $b = \rho/4$  и  $a = 3\rho/(16h)$ .

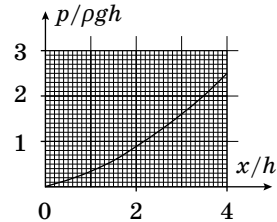
Рассмотрим слой жидкости толщиной  $\Delta x$  на глубине  $x$ . Из условия равновесия для этого слоя:  $\Delta p = \rho(x)g\Delta x$ . Величина  $\Delta p$  пропорциональна площади заштрихованной части. А разность гидростатических давлений  $p(x) - p(0)$  пропорциональна площади под графиком на участке от 0 до  $x$ . Полагая, что  $p(0) = 0$ , получаем выражение для зависимости давления от глубины:



$$p(x) = \frac{gx}{2}(\rho(0) + \rho(x)) = \frac{\rho gx}{8} \left( 2 + \frac{3x}{4h} \right).$$

Давление в точках  $A$  и  $B$  равны:  $p_A = 3\rho gh$  и  $p_B = 2,5\rho gh$ .

Так как  $p_A > p_B$ , жидкость будет перетекать из левого колена в правое. Пусть из левого колена вытекает столб жидкости высотой  $H$ . Из-за несжимаемости жидкости:  $SH = 2SH_1$ . Значит в правой сосуд перетек слой жидкости толщиной  $H_1 = H/2$ . Следовательно, слой жидкости такой же толщины должен вытечь сверху. В условии равновесия давления в нижних точках равны. Найдем давление в нижней точке в правом колене  $p'_B = \rho gH/2 + p_C$ . Точка  $C$  расположена в правом колене на разделе сред с постоянной и переменной плотностями.



Давление  $p_C$  находим, аналогично:

$$p_C = \frac{g}{2} \left( 4h - \frac{H}{2} \right) \left( \rho \left( \frac{H}{2} \right) + \rho(4h) \right).$$

Получаем:

$$p'_B = \rho gh \left( \frac{5}{2} + \frac{3H}{8h} - \frac{3}{128} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right).$$

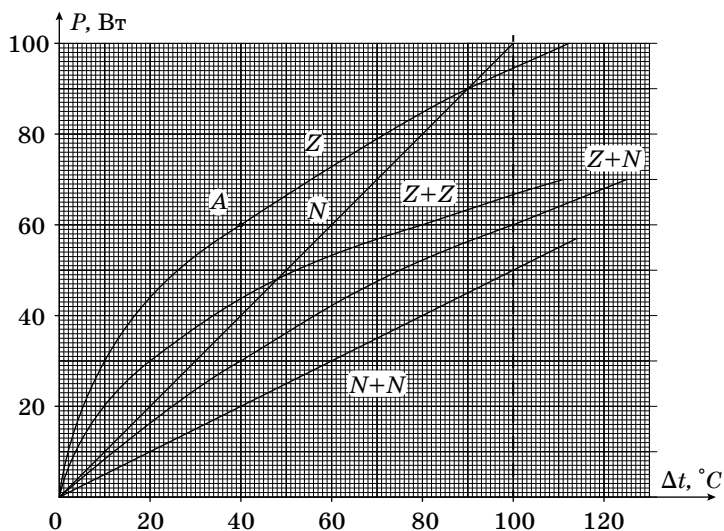
Приравнивая давления слева и справа от крана, получаем:

$$\frac{3}{64} \left( \frac{H}{h} \right)^2 - \frac{11}{4} \left( \frac{H}{h} \right) + 1 = 0.$$

Решение уравнения дает:  $H/h = 58,3$  – побочное решение и  $H/h = 0,37$ . Уровень жидкости сместился на  $H = 0,37h$ .

### Задача 8.3

- 1) Восстановим масштаб по оси мощности на графике. При разности температур  $t_1 - t_2 = 100$  °C мощность теплового потока через  $N$ -тепловод равна  $P_1 = 100$  Вт. На графике это значение соответствует сотому делению, следовательно, цена деления равна 1 Вт.
- 2) Теперь по графику находим мощность потока  $P_3$  через  $Z$ -тепловод при разности температур 100 °C. Из графика  $P_3 = 94$  Вт.
- 3) Рассмотрим случай, когда между термостатами находятся два тепловода, соединенных последовательно. В установившемся режиме мощности теплового потока через тепловоды равны, а разность температур между термостатами равна сумме разностей температур на каждом тепловоде. Получим график  $P(\Delta t)$  для последовательного соединения тепловодов, складывая разности температур при одинаковой мощности. Проведем это для соединений  $N + N$ ,  $Z + Z$ ,  $Z + N$  и найдем мощности  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ .



Из графика:  $P_2 = 50$  Вт,  $P_4 = 67$  Вт,  $P_5 = 60$  Вт.

Найдем температуры на стыке между тепловодами. При мощности  $P_5 = 60$  Вт разность температур на  $Z$ -тепловоде равна  $40^\circ\text{C}$  (точка А). Если  $Z$ -тепловод соединен с первым термостатом, то температура на стыке равна  $t = 40^\circ\text{C}$ . Если он соединен со вторым термостатом, то температура на стыке равна  $t = 60^\circ\text{C}$ .

#### Задача 8.4

Сила тока, текущего через резистор, равна разности сил токов  $I_1$  и  $I_2$ . Приравнявая напряжения на средней и верхней ветвях схемы, получим:  $I_2 R_x = (I_1 - I_2)R$ .

С другой стороны, для нижнего контура  $U = I_1(R - R_x) + I_2 R_x$ , откуда можно выразить токи:

$$I_1 = \frac{U(R + R_x)}{R^2 + R_x(R - R_x)},$$

$$I_2 = \frac{UR}{R^2 + R_x(R - R_x)},$$

где  $R_x = Rvt/l$ .

Если ползунок потенциометра находится в крайнем правом положении, то общее сопротивление цепи равно  $R$ . При параллельном соединении  $R_x$  и  $R$  эквивалентное сопротивление получается меньше этих двух значений, значит, общее сопротивление цепи меньше  $R$ . Следовательно, минимальное значение силы тока  $I_1$  равно  $I_{1\text{мин}} = U/R = 12$  мА.

Второй ток изменяется в зависимости от характера изменения слагаемого  $R_x(R - R_x)$  в знаменателе. По свойствам параболы максимального значения эта комбинация достигает при  $R_x = R/2$ . При этом, сила ток уменьшается до значения  $I_{2\text{мин}} = 4U/5R = 9,6$  мА, а затем растет до исходного значения.

Отношение  $I_1/I_2 = 1 + R_x/R = 1 + vt/l$ , откуда  $l = v/\xi = 12$  см.