XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Операция* ***удвоения цифры*** *натурального числа состоит в умножении этой цифры на 2 (если это произведение оказывается двузначным, то цифра в следующем разряде числа увеличивается на 1, как при сложении «в столбик»). Например, из числа 9817 удвоениями цифр 7, 1, 8 и 9 можно получить числа 9824, 9827, 10617 и 18817 соответственно. Можно ли из числа 22..22 (20 двоек) несколькими такими операциями получить число 22...22 (21 двойка)?* (Н. Агаханов)

Ответ. Можно. **Решение**. Трижды удвоим первую цифру числа 22…22 (20 двоек). Получим число 1622..22 (21 цифра). Теперь удвоим цифру 6 и получим искомое число 22..22 (21 двойка). **Замечание**. Есть и другие способы.

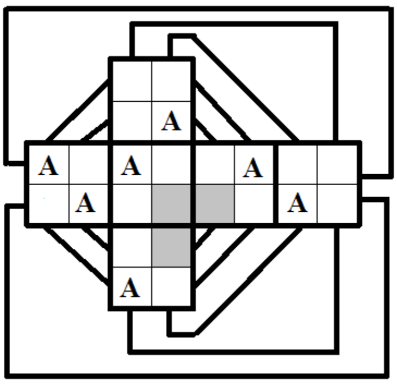
2. *Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то натуральное число. Затем первый сказал: «Мое число больше 1», второй сказал: «Мое число больше 2», ..., десятый сказал: «Мое число больше 10». После этого они же, выступая в другом порядке, сказали (каждый по одной фразе): «Мое число меньше 1», «Мое число меньше 2», ..., «Мое число меньше 10». Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?* (О. Подлипский)

Ответ. 8. **Решение**. Те, кто в первой серии ответов сказали, что их числа больше 9 и 10, заведомо лжецы, потому что эти ответы не совместимы ни с каким из ответов второй серии. Значит, рыцарей не больше восьми. Пример, когда рыцарей ровно 8: у первых восьмерых в первой серии ответов задуманы числа 2, …, 9 соответственно, и они дают ответы «Мое число меньше 3», …, «Мое число меньше 10» во второй серии ответов. Каждый из двух лжецов задумал число 5, и они дают два последних ответа первой серии и два первых ответа второй серии.

3. *По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?* (Н. Агаханов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Допустим, r — указанный в условии остаток. Тогда каждое из стоящих по кругу чисел больше r. Значит, неполное частное при каждом из делений с остатком больше 0, и потому каждое из чисел больше следующего за ним по часовой стрелке. Но такое невозможно, так как, начав с некоторого числа a и обойдя по часовой стрелке круг, мы обнаружим, что число, за которым по часовой стрелке следует a, меньше, чем a, а должно быть больше.

4. *Имеется кубик, каждая грань которого разбита на 4 одинаковые квадратные клетки. Олег хочет отметить невидимыми чернилами 8 клеток так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей стороны. У Рустема есть детекторы. Если детектор помещен в клетку, чернила на ней делаются видимыми. Какое наименьшее число детекторов Рустем может поместить в клетки так, чтобы, какие бы клетки после этого Олег ни отметил, можно было определить все отмеченные клетки?* (Р. Женодаров, О. Дмитриев)



Ответ. 16. **Решение**. *Пример*. Разобьем все 24 клетки на восемь троек, где в каждую тройку входят три клетки, примыкающие к одной вершине кубика. У любых двух клеток из одной тройки есть общая сторона. Поскольку отмеченных клеток столько же, сколько троек, в каждой тройке должна быть ровно одна отмеченная клетка. Разместим 16 детекторов так, чтобы в каждой тройке было два детектора. Если в данной тройке один из детекторов сработал, мы нашли отмеченную в этой тройке клетку, если не сработали оба детектора --- отмечена клетка, где детектора нет. *Оценка*. Пусть мы разместили меньше 16 детекторов. Тогда найдется тройка, где есть хотя бы две клетки без детекторов (назовем их «свободными») — отметим ее клетки на изображенной справа развертке куба тёмными фоном. На этой же развёртке отметим 7 клеток буквой А так, как показано на рисунке. Теперь заметим, что если отметить невидимыми чернилами семь клеток А и одну из свободных клеток, то детекторы не позволят нам узнать, какая именно из свободных клеток отмечена. Поэтому меньше, чем 16 детекторами, обойтись не удастся.

5. *Периметр треугольника ABC равен 2. На стороне AC отмечена точка P, а на отрезке CP — точка Q так, что 2AP = AB и 2QC = BC. Докажите, что периметр треугольника BPQ больше 1.* (А. Кузнецов)

Решение. Положим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Нам требуется доказать, что $BP+BQ+PQ > 1 = (a+b+c)/2$. Поскольку $PQ = AC–AP–CQ = b–(a+c)/2$, надо доказать, что $BP+BQ > (a+b+c)/2–b+(a+c)/2 = a+c–b/2$.

Обозначим через M и N середины сторон AB и BC соответственно, а через R и S такие точки на лучах AC и CA соответственно, что $AR = AB$, $CS = CB$. Заметим, что $BP = RM$ как медианы из вершин основания равнобедренного треугольника BAR. Аналогично, $BQ = SN$. Осталось заметить, что сумма $SN+RM$ диагоналей трапеции $RNMS$ больше суммы ее оснований $SR+MN = (AR+CS–AC)+AC/2 =(c+a–b)–b/2 = a+c–b/2$.