XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на –1, равна удвоенному квадрату целого числа.* (Н. Агаханов)

Решение. Пусть по кругу стоят (в указанном порядке) числа a, b. c, d. Тогда сумма четырех произведений, умноженная на –1, равна $-a(b+d)-b(a+c)-c(b+d)-d(a+c) = -2(a+c)(b+d) = 2(a+c)^2$, что и требовалось доказать. Последнее равенство здесь вытекает из того, что по условию $a+c = -(b+d)$.

7. *Будем называть две клетки клетчатой таблицы соседями, если у них есть общая сторона. Можно ли покрасить в белой таблице размером 10×10 клеток 32 клетки в черный цвет так, чтобы у каждой черной клетки было поровну черных и белых соседей, а у каждой белой клетки — не поровну?* (О. Южаков)

Ответ. Можно. **Решение**. Разделим таблицу на четыре квадрата 5×5 и в каждом покрасим черным 8 клеток, примыкающих по стороне или углу к его центральной клетке. К каждой черной клетке будет примыкать по две белых и две черных, и нетрудно проверить, что у каждой белой клетки примыкающих к ней черных и белых — не поровну.

8. *Точка N — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $\angle ACB = 60°$. Точка M на стороне AC такова, что $AM = BN$. Точка K — середина отрезка BM. Докажите, что $AK = KC$.* (Е. Бакаев, А. Кузнецов)

Первое решение. Достроим треугольник MCN до параллелограмма $NCML$. В треугольнике AML $LM = NC = BN = AM$, $\angle AML = \angle BCM = 60°$. Следовательно, треугольник AML — равносторонний. Отсюда $AL = NC$ и $\angle ALK = \angle ALM+\angle NLM = 60°+60° = 120° = \angle KNC$. Кроме того, отрезок LM параллелен и равен отрезку BN, так что $BNML$ — параллелограмм, а K — точка пересечения его диагоналей, откуда $LK = KN$. Значит, треугольники ALK и CNK равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $AK = KC$.

Второе решение. Достроим треугольник AMB до параллелограмма $AMTB$; тогда K — точка пересечения его диагоналей. Из параллельности имеем $\angle CBT = \angle BCA = 60°$; кроме того, $BT = AM = BC/2$. Значит, треугольник BTC — прямоугольный с прямым углом T, то есть $TC \perp BT \parallel BC$. Поэтому и треугольник ACT тоже прямоугольный, и его медиана CK равна половине гипотенузы, то есть равна AK.

9. *Имеется 70 переключателей и 15 ламп. Каждая лампа соединена с 35 переключателями. Никакие два переключателя не соединены с одним и тем же набором ламп. Нажатие на переключатель меняет состояние всех ламп, с которыми он соединён (включённые выключает и наоборот). Изначально все лампы выключены. Докажите, что можно нажать на какие-то 19 переключателей таким образом, чтобы включилось не менее восьми ламп.* (С. Берлов)

Решение. Рассмотрим всевозможные наборы из 19 переключателей. Рассмотрим также любую лампочку. Разобьём все переключатели на 35 пар таким образом, чтобы в каждой паре ровно один переключатель был соединён с выбранной лампочкой. Заметим, что тогда все наборы по 19 переключателей тоже разбились на пары, получающиеся заменой всех переключателей на парные. Так как число 19 нечетно, в каждой паре наборов ровно один включает выбранную лампочку.

Составим таблицу, в которой строки соответствуют лампочкам, а столбцы — наборам из 19 переключателей, и отметим в каждой строке единицами наборы, включающие соответствующую лампочку. Из доказанного выше следует, что единицы в таблице занимают ровно половину клеточек. Значит, найдется столбец, в котором единицы занимают не меньше половины клеточек, то есть найдётся набор, который включает не менее половины всех лампочек. Следовательно, какой-то набор из 19 переключателей зажжёт не менее 8 лампочек.

10. *Петя выбирает такие неотрицательные числа x_1, x_2, …, x_{11}, что их сумма равна 1. Вася расставляет их в ряд по своему усмотрению, считает произведения соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из получившихся десяти произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, Вася хочет, чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при наилучшей игре Пети и Васи?* (А. Храбров)

Ответ. $\frac{1}{40}$. **Решение**. Если Петя выберет числа $\frac{1}{2},\frac{1}{20},\frac{1}{20},\ldots,\frac{1}{20}$, то как бы ни расставлял эти числа Вася соседними числами окажутся $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{20}$. Значит, одно из произведений будет равно $\frac{1}{40}$, а остальные будут не больше его. Тогда на доске окажется $\frac{1}{40}$.

Покажем, как Вася может для любых чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{40}$. Перенумеруем числа в порядке убывания: $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{11}$. Расставим их в ряд следующим образом: $x_1, x_{11}, x_2, x_{10}, x_3, x_9, x_4, x_8, x_5, x_7, x_6$. Тогда произведениями соседних чисел будут: $x_1x_{11} \geq x_{11}x_2$, $x_2x_{10} \geq x_{10}x_3$, $x_3x_9 \geq x_9x_4$, $x_4x_8 \geq x_8x_5$, $x_5x_7 \geq x_7x_6$. Покажем, что они будут не больше $\frac{1}{40}$. Для этого будем пользоваться двумя соображениями: среднее арифметическое нескольких чисел не меньше наименьшего из них и $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Достаточно оценить x_1x_{11}, x_2x_{10}, x_3x_9, x_4x_8 и x_5x_7:

$$x_1x_{11} \leq x_1 \cdot \frac{x_2+x_3+\ldots+x_{11}}{10} = \frac{x_1(1-x_1)}{10} \leq \frac{1}{40},$$

$$x_2x_{10} \leq \frac{x_1+x_2}{2} \cdot \frac{x_3+x_4+\ldots+x_{10}}{8} \leq \frac{(x_1+x_2)\big(1-(x_1+x_2)\big)}{16} \leq \frac{1}{64} < \frac{1}{40},$$

$$x_3x_9 \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \cdot \frac{x_4+x_5+\ldots+x_9}{6} \leq \frac{(x_1+x_2+x_3)\big(1-(x_1+x_2+x_3)\big)}{18} \leq \frac{1}{72} < \frac{1}{40},$$

$$x_4x_8 \leq \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \cdot \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4} \leq \frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)\big(1-(x_1+x_2+x_3+x_4)\big)}{16} \leq \frac{1}{64} < \frac{1}{40},$$

$$x_5x_7 \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_5}{5} \cdot \frac{x_6+x_7}{2} \leq \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_5)\big(1-(x_1+x_2+\ldots+x_5)\big)}{10} \leq \frac{1}{40}.$$