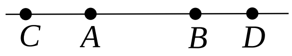
Второй тур дистанционного этапа XI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Машина едет с постоянной скоростью в одном направлении по прямой дороге, возле которой стоят два дома. В полдень, когда машина еще не доехала до домов, сумма расстояний от нее до этих домов равнялась 10 км. Через 10 минут, когда машина уже миновала оба дома, оказалось, что сумма расстояний от нее до домов снова равна 10 км. Какова скорость машины?* (Автор задачи — И. Рубанов)

<ins>Ответ</ins>. 60 км/ч. <ins>Решение</ins>. Пусть дома находятся в точках A и B, машина в полдень находилась в точке C, а через 10 минут — в точке D (см. рис.). По условию $CA+CB = DA+DB = 10$. Заметим, что $CA+CB = 2CA+AB$, а $DA+DB = 2DB+AB$, откуда $CA = DB$. Поэтому $CD = CA+AB+BD = 2CA+AB = 10$ км. Получается, что за 10 минут машина проехала 10 километров. Поэтому за 60 минут она проедет 60 км.



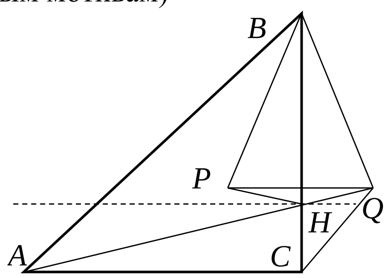
2. *При каком наибольшем натуральном k клетки таблицы 5×5 можно заполнить нулями и единицами (в каждой клетке должно стоять ровно одно число) так, чтобы нашлись k строк, в каждой из которых сумма чисел не меньше 3, и k столбцов, в каждом из которых сумма чисел не больше 2?*(О. Нечаева, И. Рубанов)

<ins>Ответ</ins>. При $k = 4$. <ins>Решение</ins>. При $k = 5$ таблицу искомым образом заполнить нельзя, так как при счете суммы чисел в таблице сложением сумм по строкам получается, что она не меньше $3\cdot5 = 15$, а при счете той же суммы по столбцам получается, что она не больше $2\cdot5 = 10$. Пример заполнения таблицы, удовлетворяющего условию задачи при $k = 4$, приведен на рисунке справа.

1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1

3. *Внутри треугольника ABC расположена точка P. На стороне BC выбрана точка H, не совпадающая с серединой стороны. Оказалось, что биссектриса угла AHP перпендикулярна стороне BC, угол ABC равен углу HCP и BP = AC. Докажите, что BH = AH.*(О. Нечаева по фольклорным мотивам)

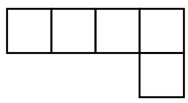
<ins>Решение</ins>. Отложим на продолжении отрезка AH за точку H отрезок $HQ = HP$. Поскольку биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, прямая BC является биссектрисой угла PHQ, смежного с углом AHP и, значит, серединным перпендикуляром к PQ. Поэтому $\angle ABC = \angle HCP = \angle HCQ = \angle BCQ$, откуда получаем, что прямые AB и CQ параллельны. Заметим, что при этом прямые AC и BQ не параллельны, так как иначе точка H пересечения диагоналей параллелограмма $ABQC$ была бы, вопреки условию, серединой отрезка BC. Так как, кроме того, $AC = BP = BQ$, получается, что $ABQC$ — равнобедренная трапеция, и равенство $AH = BH$ — ее известное (и легко доказываемое) свойство.



4. *Найдите все натуральные числа n, для которых число* $n^7+n^6+n^5+1$ *имеет ровно три натуральных делителя.* (О. Нечаева, И. Рубанов)

<ins>Ответ</ins>. 1. <ins>Решение</ins>. При $n = 1$ $n^7+n^6+n^5+1 = 4$. У числа 4 ровно три делителя: 1, 2, 4. Заметим далее, что $n^7+n^6+n^5+1 = (n^7+n^5)+(n^6+1) = n^5(n^2+1)+(n^2+1)(n^4-n^2+1) = (n^2+1)(n^5+n^4-n^2+1) = (n^2+1)(n+1)(n^4-n+1)$. При $n > 1$ выполнены неравенства $n^2+1 > n+1 > 1$, и у числа $(n^2+1)(n+1)(n^4-n+1)$ есть по крайней мере четыре различных делителя: 1, $n+1$, n^2+1 и $(n^2+1)(n+1)$.

5. *Назовем* ***сапогом*** *клетчатую фигуру, составленную из прямоугольника шириной одну и длиной не менее двух клеток и клетки, примыкающей сбоку к одной из крайних клеток этого прямоугольника (на рисунке изображен пример сапога, составленного из 5 клеток; фигуры, которые получаются из изображенного сапога поворотами и переворотами — тоже сапоги). Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеточек на сапоги, среди которых нет равных? Напомним, что фигуры называются равными, если их можно наложить друг на друга так, что они совместятся.* (И. Рубанов)



<ins>Ответ</ins>. Нельзя. <ins>Решение</ins>. Назовем *длиной сапога* количество клеток в его голенище (например, на чертеже из условия задачи сапог длины 4). Очевидно, что два сапога равны тогда и только тогда, когда равны их длины. Возьмем квадрат со стороной n. Допустим, его удалось разрезать на попарно различные сапоги. Длина любого из них не превосходит n, и среди них не больше одного сапога каждой из длин n, $n-1$, …, 2. Значит, их суммарная площадь не больше, чем $3+\ldots+n+(n+1) = (n+4)(n-1)/2 = (n^2+3n-4)/2$. Теперь достаточно показать, что полученный результат меньше площади квадрата: $(n^2+3n-4)/2 < n^2 \Leftrightarrow n^2-3n+4 > 0$

$\Leftrightarrow$ $n > 3–4/n$. Последнее неравенство очевидным образом выполнено при $n \geq 3$, а при $n = 2$ проверяется непосредственно.