XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

2 февраля 2019 г.

---

8 класс.

Второй день.

6. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

7. Будем называть две клетки клетчатой таблицы *соседями*, если у них есть общая сторона. Можно ли покрасить в белой таблице размером 10×10 клеток 32 клетки в черный цвет так, чтобы у каждой черной клетки было поровну черных и белых соседей, а у каждой белой клетки — не поровну?

8. Точка N — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $\angle ACB = 60°$. Точка M на стороне AC такова, что $AM = BN$. Точка K — середина отрезка BM. Докажите, что $AK = KC$.

9. Имеется 70 переключателей и 15 ламп. Каждая лампа соединена с 35 переключателями. Никакие два переключателя не соединены с одним и тем же набором ламп. Нажатие на переключатель меняет состояние всех ламп, с которыми он соединён (включённые выключает и наоборот). Изначально все лампы выключены. Докажите, что можно нажать на какие-то 19 переключателей таким образом, чтобы включилось не менее восьми ламп.

10. Петя выбирает такие неотрицательные числа x_1, x_2, …, x_{11}, что их сумма равна 1. Вася расставляет их в ряд по своему усмотрению, считает произведения соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из получившихся десяти произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, Вася хочет, чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при наилучшей игре Пети и Васи?