Первый тур дистанционного этапа XIV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *В зашифрованном равенстве АБ+АБ+АБ+АБ+АБ+АБ+АБ+АБ+АБ = ААБ цифры заменены буквами: одинаковые цифры — одной и той же буквой, а разные — разными буквами. Найдите все возможные расшифровки.* (И. Рубанов)

Ответ. 25+…+25 = 225. Решение. Прибавим АБ к обеим частям данного в условии равенства. Получим равенство 10·АБ = ААБ+АБ. Значит, Б+Б оканчивается на 0, то есть Б = 0 или Б = 5. Если Б = 0, то 100А = 120А, откуда А = 0, что невозможно. Если же Б = 5, то из уравнения 100А+50 = 120А+10 находим, что А = 2.

2. *Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$. На стороне BC нашлась такая точка D, что $CD = AC$. Точка E на луче DA такова, что $DE = AC$. Какой отрезок длиннее — EC или AC?* (И. Рубанов)

Ответ. Отрезок AC не короче отрезка EC. Решение. Если треугольник ABC равносторонний, отрезки AC и EC равны. Рассмотрим случай, когда треугольник ABC не равносторонний. Так как $BC > CD = AC$, AC — наименьшая сторона равнобедренного треугольника ABC, и лежащий против неё угол ABC — наименьший угол треугольника ABC. Значит, $\angle ABC < 60°$, а $\angle ACB > 60°$. Тогда из треугольника ACD имеем $\angle ADC = (180°–\angle ACB)/2 < 60°$, а из треугольника CDE $\angle DEC = (180°–\angle CDE)/2 = (180°–\angle CDA)/2 > 60°$. Таким образом, в треугольнике CDE $\angle DEC > 60° > \angle EDC = \angle ADC$, откуда $AC = CD > CE$.

3. *Натуральные числа n ($n > 1$) и k таковы, что для любого натурального делителя d числа n хотя бы одно из чисел $d+k$ и $d–k$ также является натуральным делителем числа n. Докажите, что число n — простое.* (А. Голованов)

Решение. Так как числа 1 и n являются делителями числа n, числа $n–k$ и $1+k$ также должны быть его делителями. Поскольку все делители числа n, кроме самого n, не превосходят $n/2$, имеем $n–k \le n/2$, откуда $k \ge n/2$. Но тогда $1+k > n/2$, откуда $1+k = n$, то есть $k = n–1$. Если у числа n есть делитель d, не равный 1 и n, то тогда одно из чисел $d+n–1$ и $d–n+1$ также должно быть делителем n. Но эти числа не могут быть делителями n, так как $d+n–1 > n$, а $d–n+1 < 1$. Значит, у числа n есть только два делителя — n и 1 (случай $n = 1$ запрещен условием), что и означает его простоту.

4. *Существуют ли такие положительные числа a, b, c, что $a+b+c = ab+ac+bc = abc$?* (И. Рубанов)

Ответ. Таких чисел не существует. Первое решение. Поделив равенство $ab+ac+bc = abc$ на abc, получим $1/a+1/b+1/c = 1$, откуда $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$. Но тогда $ab > a$, $ac > c$, $bc > b$ и $ab+ac+bc > a+b+c$. Второе решение. Если верно равенство из условия, то верно и равенство $(ab+ac+bc)^2 = abc(a+b+c)$. Но после раскрытия скобок и приведения подобных членов из него получается равенство, где в одной части — положительная величина, а в другой — 0, что невозможно. Третье решение. Заметим, что для любых положительных x, y и z выполнено неравенство

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = (x^2+y^2)/2+(y^2+z^2)/2+(z^2+x^2)/2+2(xy+yz+zx) \ge 3(xy+yz+zx).$$

Полагая $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, получаем $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$, что противоречит условию.

5. *Стороны 100 одинаковых равносторонних треугольников покрашены в 150 цветов так, что в каждый цвет покрашены ровно две стороны. Если приложить два треугольника одноцветными сторонами, то полученный ромб будем называть хорошим. Петя хочет сложить из этих треугольников как можно больше хороших ромбов, причем каждый треугольник должен входить не более, чем в один ромб. Какое наибольшее количество хороших ромбов может гарантировать себе Петя независимо от способа раскраски треугольников?* (С. Берлов, И. Рубанов)

Ответ. 25. Решение. *Почему всегда можно получить 25 хороших ромбов?* Построим максимальное возможное число хороших ромбов. Пусть их меньше 25. Тогда есть хотя бы 52 треугольника, не вошедших ни в один хороший ромб. Назовем такие треугольники *одиночными*. Для каждого треугольника выберем цвет, ровно одна сторона которого принадлежит данному треугольнику. Будем называть такие цвета *выделенными*. Итого, имеем хотя бы 52 выделенных цвета. Заметим, что для каждого выделенного цвета одна из сторон этого цвета не принадлежит одиночному треугольнику (в противном случае, можно склеить два одиночных треугольника по сторонам данного цвета и увеличить число хороших ромбов). Тогда одна из сторон каждого выделенного цвета является стороной хорошего ромба. Поскольку выделенных цветов хотя бы 52, а хороших ромбов не более 24, найдется хороший ромб, хотя бы 3 стороны которого имеют выделенные цвета. Тогда две из этих сторон находятся в разных треугольниках. Следовательно, мы можем разделить этот ромб на два треугольника и каждый из них склеить с одиночным треугольником по стороне выделенного цвета. Количество хороших ромбов снова увеличилось. Противоречие. *Почему больше 25 хороших ромбов может не получиться?* Разобьём наши треугольники на 25 четверок, а цвета — на 25 шестерок, и сопоставим каждой четверке треугольников шестерку цветов так, чтобы все шестерки были использованы. Покрасим стороны четверки треугольников, которой сопоставлены цвета 1, 2, 3, 4, 5, 6, таким образом: 123, 144, 255, 366. Так как в любой хороший ромб из этих треугольников входит треугольник 123, двух хороших ромбов мы из них составить не сможем. Проделав такое с каждой четверкой, получим раскраску, не позволяющую составить больше 25 хороших ромбов.