Третий тур дистанционного этапа XIV олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Петя и Вася пробежали одну и ту же дистанцию. Вася бежал вдвое быстрее Пети, но стартовал на минуту позже, и Петя пришёл к финишу первым. Докажите, что Петя пробежал дистанцию меньше чем за две минуты.* (И. Рубанов)

Решение. Вася бежит вдвое быстрее Пети, и потому за минуту пробегает столько же, сколько Петя за две минуты. Значит, если Петя через две минуты после старта ещё не финиширует, то Вася его догонит.

2. *За круглым столом сидели 99 человек, все разного роста. Каждый честно ответил на два вопроса:*

1. «Вы выше, чем ваш сосед справа?»

2. «Вы выше, чем оба ваших соседа — справа и слева?».

Какое наибольшее количество ответов «Да» могло быть дано? (С. Берлов)

Ответ. 99. Решение. *Пример*. Справа от самого высокого сидит второй по росту, справа от него — третий по росту и т. д., до самого низкого. Тогда самый высокий сказал «Да» дважды, самый низкий не сказал «Да» ни разу, а остальные сказали «Да» по одному разу, то есть всего ответов было 99. *Оценка*. Разобьём все 198 ответов на 99 пар, в каждую пару включим ответ какого-то человека А на первый вопрос и ответ его соседа справа Б — на второй. Если в паре первый ответ — «Да», то А выше Б, и второй ответ в паре должен быть «нет». Значит, в каждой паре не более одного ответа «Да», то есть всего их не более 99. Замечание. На самом деле 99 ответов «Да» будет дано при любой рассадке, где нет трех человек подряд, рост которых возрастает против часовой стрелки. В самом деле, тогда в каждой паре ответов из приведенного доказательства оценки будет ровно один ответ «Да».

3. *Два числа таковы, что их сумма, сумма их квадратов и сумма их кубов равны одному и тому же числу m. Докажите, что сумма четвёртых степеней этих чисел тоже равна m.* (И. Рубанов)

Первое решение. Пусть $a+b = a^2+b^2 = a^3+b^3 = m$. Тогда $m = a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = m(m-ab)$, откуда $m=0$ или $ab = m-1$. Если $m = a^2+b^2 = 0$, то $a = b = 0$ и $a^4+b^4 = 0 = m$. Если $ab = m-1$, то

$$m^2 = (a+b)(a^3+b^3) = a^4+b^4+ab(a^2+b^2) = a^4+b^4+(m-1)m, \text{ откуда } a^4+b^4 = m.$$

Второе решение. В обозначениях из первого решения $(a+b)(a^3+b^3) = (a^2+b^2)^2 = m^2$. Раскрыв скобки, после приведения подобных членов получим $a^3b+ab^3 = 2a^2b^2$, откуда $ab(a-b)^2 = 0$. Из последнего равенства следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$, либо $a = b$. Если $a = 0$, то по условию $b = b^2$, откуда $b = 0$ или $b = 1$. Аналогично, если $b = 0$, то $a = 0$ или $a = 1$. Наконец, если $a = b$, то по условию $2b = 2b^2$, откуда $a = b = 0$ или $a = b = 1$. Во всех случаях каждое из чисел a и b равно 0 или 1, и потому $a^4+b^4 = a+b = m$.

4. *В треугольнике ABC провели биссектрису BE и серединный перпендикуляр m к стороне AB. Оказалось, что BE = EC, а прямая m пересекает сторону BC. Докажите, что угол C меньше 36 градусов.* (И. Рубанов)

Решение. Пусть $\angle ABC = 2\beta$, а прямая m пересекает сторону BC в точке D. По свойству серединного перпендикуляра $DA = DB$, откуда $\angle DAB = \angle ABD = 2\beta$. Значит, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ADC = \angle DAB+\angle ABD = 4\beta$. Кроме того, поскольку $BE = EC$, $\angle C = \angle DBE = \beta$. Из треугольника ADC имеем $180° = \angle DAC+\angle ADC+\angle C = \angle DAC+4\beta+\beta$, откуда $\angle C = \beta = (180°-\angle DAC)/5 < 36°$.

5. *Из нечётных натуральных чисел от 1 до 47 составили 12 дробей, меньших 1, использовав каждое число по одному разу. Получившиеся дроби разбили на группы равных между собой. Какое наименьшее количество групп могло получиться?* (И. Рубанов)

Ответ. 7. Решение. *Оценка*. Дробь, содержащая хотя бы одно из простых чисел 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, не может равняться никакой другой из наших дробей, потому что уже $17\cdot 3 > 47$. Так как таких «одиноких» дробей не больше девяти, среди составленных есть не равные им дроби. Поэтому если «одиноких» дробей хотя бы шесть, групп равных дробей не меньше семи. Пусть «одиноких» дробей пять (меньше, очевидно, быть не может). Заменим одну из остальных дробей равной ей несократимой дробью m/n. Так как все дроби меньше 1, то $n \geq 3$. Знаменатели дробей, равных m/n, нечётны, кратны n и не превосходят 47. Если $n \geq 5$, то таких знаменателей не больше пяти, и среди семи оставшихся дробей найдутся две неравных — оценка доказана. При $n = 3$ нечётных чисел, кратных 3 и не превосходящих 47, восемь: 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45. Но все оставшиеся дроби после сокращения должны давать 1/3, и при этом в одном наборе не могут находиться дроби 1/3 и 3/9, а также дроби 5/15 и 15/45, так что всего дробей, равных 1/3, не больше шести. Значит, и в этом случае среди семи оставшихся дробей найдутся две неравных.

Пример, когда классов ровно 7: {1/3, 5/15, 7/21, 9/27, 11/33, 13/39}, {25/41}, {35/43}, {45/47}, {17/19}, {23/29}, {31/37}.