10 класс

10.1. **Ответ.** Не существуют.

Предположим, что такие восемь чисел найдутся. Из условия следует, что ровно одно из них не делится на 2 и ровно два из них не делятся на 3. Значит, среди рассматриваемых чисел не менее пяти чисел делятся и на 2, и на 3, т. е. делятся на 6. Но по условию чисел, делящихся на 6, должно быть ровно три. Противоречие.

10.2. Из неравенства получаем, что трехчлены $(ax^2+bx+c)-(bx^2+cx+a)$ и $(bx^2+cx+a)-(cx^2+ax+b)$ принимают неотрицательные значения при всех значениях x; отсюда следует, что их старшие коэффициенты $a-b$ и $b-c$ неотрицательны, т. е. $a \geqslant b \geqslant c$.

С другой стороны, подставив в исходные неравенства $x=0$, получаем $c \geqslant a \geqslant b$, откуда $a \geqslant b \geqslant c \geqslant a$, что возможно лишь в случае равенства всех трех коэффициентов.

10.3. Через основание A_1 биссектрисы угла BAC проведем прямые, параллельные AC и AB, пересекающие соответственно AB и AC в точках P и Q. По построению APA_1Q — параллелограмм, диагональ AA_1 которого является биссектрисой, значит, APA_1Q — ромб, откуда $A_1P = A_1Q$.

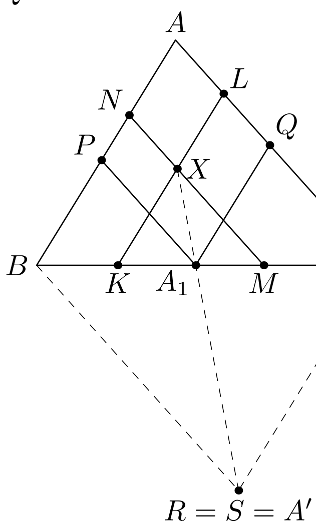

Рис. 7

Рассмотрим некоторую точку X, лежащую внутри треугольника ABC, для которой длины отрезков b_X и c_X равны. Обозначим через K, L, M, N концы отрезков b_X и c_X (см. рис. 7). Каждый из треугольников PBA_1, NBM, QA_1C, LKC подобен треугольнику ABC. Из подобия и равенств $KL = MN$ и $PA_1 = QA_1$ вытекает: $\frac{BM}{BA_1} = \frac{NM}{PA_1} = \frac{LK}{QA_1} = \frac{CK}{CA_1}$. (Заметим, что $\frac{BM}{BA_1} = \frac{CK}{CA_1} > 1$, иначе X не лежит внутри треугольника ABC.) Далее, $\frac{BM}{BA_1} = \frac{BA_1 + A_1M}{BA_1} = 1 + \frac{A_1M}{BA_1}$, $\frac{CK}{CA_1} = \frac{CA_1 + A_1K}{CA_1} = 1 + \frac{A_1K}{CA_1}$, отсюда $\frac{A_1M}{BA_1} = \frac{A_1K}{CA_1}$.

Проведем через B прямую, параллельную AC, до пересечения с прямой XA_1 в точке R. Также проведем через C прямую, параллельную AB, до пересечения с прямой XA_1 в точке S. Из подобия треугольников A_1MX и A_1BR, а также треугольников A_1KX и A_1CS вытекает, что $\frac{A_1X}{RA_1} = \frac{A_1M}{BA_1} = \frac{A_1K}{CA_1} = \frac{A_1X}{SA_1}$. Отсюда $RA_1 = SA_1$, значит S и R совпадают с такой точкой A', что $ABAC$ — параллелограмм. Получаем, что X лежит на фиксированной прямой A_1A'.

10.4. **Ответ.** Петя.

Заметим, что число $A_n = 10\underbrace{11\ldots11}_{n \text{ единиц}}$ не делится на 11. Действительно, если n

четно, то $A_n = 1\underbrace{000\ldots00}_{n+1\text{ нулей}} + \underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$, а если n нечетно, то $A_n = 9\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ нулей}} + \underbrace{111\ldots11}_{n+1\text{ единица}}$. В обоих случаях второе слагаемое делится на 11, а первое — нет.

Поскольку с каждым ходом число на доске уменьшается, рано или поздно один из игроков проиграет. Предъявим беспроигрышную стратегию для Пети, действуя по которой, он сможет после каждого своего хода получать число вида A_n. Первым ходом Петя заменит вторую слева единицу на ноль, а в дальнейшем либо стирает ноль, появившийся на предыдущем ходе Васи (т. е. число вида A_m), либо, если тот стер единственный ноль, опять заменяет вторую слева единицу на ноль. Если Петя не может сделать последнего действия, то перед ним число 11, т. е. Вася уже проиграл на предыдущем ходу.

10.5. **Ответ.** Последовательность ровно из 2007 семерок.

Последовательность из ровно 2007 семерок появится, например, при выписывании чисел $N = \underbrace{777\ldots77}_{1004\text{ семерки}}$ и $N+1 = \underbrace{777\ldots7}_{1003\text{ семерки}}8$, так как числу N предшествует цифра 6.

Предположим, что последовательность p из 2006 подряд идущих шестерок встретилась раньше числа числа N. Подчеркнем в строке у каждого из чисел $1, 2, \ldots, N-1, N$ последнюю цифру. Между ближайшими подчеркнутыми цифрами не более 1003 цифр (так как N — 1004-значное), поэтому в p есть подчеркнутая шестерка (т. е. последняя цифра некоторого числа M), причем ровно одна, так как ближайшие к ней подчеркнутые цифры — 5 и 7: $\ldots\underline{5}\underbrace{\ldots\ldots\underline{6}}_{M}\underbrace{\ldots\ldots\underline{7}}_{M+1}\ldots$. В M и $M+1$ соответствующие цифры, кроме последних, равны. Поэтому количество шестерок между $\underline{5}$ и $\underline{7}$ — нечетное число, не превосходящее $2\cdot1003+1 = 2007$, т. е. между $\underline{5}$ и $\underline{7}$ либо 2007 шестерок подряд, либо не более 2005 шестерок. Противоречие.

10.6. Продолжим TE до пересечения с прямой AC в точке K (см. рис. 8). Покажем, что EK — высота треугольника CEA. Пусть $\angle CAB = \alpha$. Из прямоугольного треугольника AEC получаем $\angle ACE = 90^\circ - \alpha$. Далее, $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу), С другой стороны, ET — медиана в прямоугольном $\triangle BED$, поэтому $ET = DT$ и $\angle TED = \angle TDE = \alpha$, и $\angle KEC = \alpha$ как вертикальный с $\angle TED$. Отсюда получаем $\angle EKC = 180^\circ - \angle KEC - \angle KCE = 90^\circ$.

Таким образом, $TE \perp AC$ и $ON \perp AC$ (так как N — середина AC), откуда $TE \parallel ON$. Аналогично $OT \parallel EN$, что и требовалось.

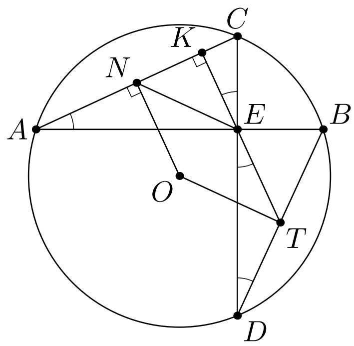

Рис. 8

З а м е ч а н и е. Утверждение задачи остается в силе и в том случае, если в точке E пересекаются не сами хорды AB и CD, а их продолжения. Доказательство в этом случае полностью аналогично изложенному.

10.7. **Ответ.** Нельзя.

Обозначим через $q(n)$ такое наибольшее целое число k, что n делится на 5^k. Для каждого n из начального набора чисел $q(n) = 0$ или $q(n) = 1 = 2^0$. Заметим, что $q(a^2) = 2q(a)$, а $q(\text{НОК}(a, b))$ равно $q(a)$ или $q(b)$. Отсюда вытекает, что для чисел n, выписанных в любой момент на доске, число $q(n)$ является целой степенью двойки или равно 0.

Число 1000000 не могло быть выписано, поскольку $q(1000000) = 6$.

10.8. На первом шаге отметим некоторые два города Y_1 и Z_1, соединенные дорогой. Далее, на очередном i-м шаге среди еще не отмеченных городов выбираем два города Y_i и Z_i, соединенные дорогой, и отметим их. Действуем так, пока это возможно. В конце концов получим такие различные отмеченные города Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, $\ldots$, Y_k, Z_k, что города с одинаковым номером соединены дорогой, и среди неотмеченных городов нет двух, соединенных дорогой. Из условия следует, что $k \leqslant n-1$.

Обозначим через A_i множество городов, которые связаны дорогой с Z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (в частности, $Y_i \in A_i$). В множество A_{k+1} включим все города, не вошедшие в A_1, A_2, ..., A_k.

Покажем, что никакие два города из одного множества A_i не соединены дорогой. Отсюда легко будет получить требуемое разбиение на округа K_1, K_2, ..., K_n: для данного города X найдем такой наименьший номер i, что $X \in A_i$, и отнесем X к округу K_i. (В некоторых округах, возможно, не будет городов.)

Если в множестве A_i ($i \leqslant k$) нашлись два города U и V, соединенные дорогой, то города U, V и Z_i попарно соединены, что невозможно. Предположим, что два города U и V из A_{k+1} соединены дорогой. Тогда один из городов U, V (скажем, U) отмеченный, иначе на $(k+1)$-м шаге можно было отметить U и V. Если $U = Y_i$ для некоторого $i \leqslant k$, то $U \in A_i$. Если же $U = Z_i$ для некоторого $i \leqslant k$, то $V \in A_i$. В любом случае получаем противоречие с тем, что U и V — города из A_{k+1}.