Решения задач

8 класс

8.1. **Ответ.** 2006.

$21 = 3 \cdot 7$, значит, в получившемся произведении могут встречаться только цифры 3, 7 и два раза 1. Поэтому в исходном числе были цифры 2, 6 и два раза 0. Так как число не может начинаться с 0, то, чтобы быть минимальным, оно должно начинаться с 2. А из чисел 2600, 2060 и 2006 наименьшим является 2006.

8.2. Пусть M и N — середины сторон AC и AB треугольника ABC, K — точка на стороне BC такая, что $CK : KB = 1 : 3$, причем $MK = NK$ (см. рис. 1). Покажем, что $\angle ACB = 90^\circ$.

Соединим точки M и N и проведем в равнобедренном треугольнике MKN высоту KP. Она является медианой этого треугольника, поэтому $MP = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}CB$ (последнее — из того, что MN — средняя линия треугольника ABC). Таким образом, $MP = KC$. Кроме того, $MN \parallel CB$, поэтому $\angle PMK = \angle MKC$, и треугольники PMK и CKM равны по двум сторонам ($MP = KC$, MK — общая) и углу между ними. Тогда $\angle MCK = \angle KPM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

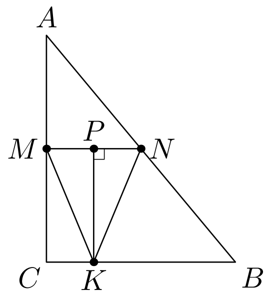

Рис. 1

8.3. **Ответ.** $n = 4$.

Назовем пару “ладья–слон” *ладейной*, если в ней ладья бьет слона, и *слоновой*, если в ней слон бьет ладью. Заметим, что слон и ладья не могут бить друг друга, поэтому пара не может являться одновременно слоновой и ладейной. По условию, ладейных пар не меньше $2n$, и слоновых тоже не меньше $2n$. С другой стороны, общее количество пар “ладья-слон” равно n^2. Поэтому $2n + 2n \leqslant n^2$, откуда $n \geqslant 4$.

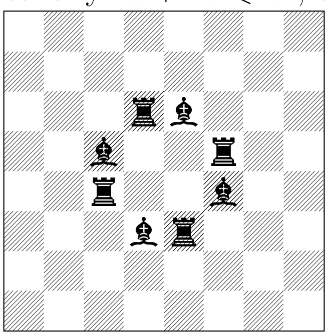
Рис. 2

В случае $n = 4$ искомая расстановка ладей и слонов существует (см. рис. 2).

8.4. Если для некоторой пары различных m и n коэффициенты b_m и b_n равны, то прямые $y = k_m x + b_m$ и $y = k_n x + b_n$ пересекаются на оси ординат, что противоречит условию. Следовательно, никакие два коэффициента из набора $\{b_1, b_2, \ldots, b_{20}\}$ не равны, поэтому каждое из чисел $1, 2, \ldots, 20$ встречается в наборе $\{b_1, b_2, \ldots, b_{20}\}$ ровно по разу.

Так как никакие две прямые не параллельны, то никакие два коэффициента из набора $\{k_1, k_2, \ldots, k_{20}\}$ не равны, значит каждое из чисел $1, 2, \ldots, 20$ встречается в наборе $\{k_1, k_2, \ldots, k_{20}\}$ ровно по разу.

Вычислим абсциссу точки пересечения прямых $y = k_m x + b_m$ и $y = k_n x + b_n$ ($m \neq n$): $x_{mn} = \dfrac{b_m - b_n}{k_n - k_m}$. Отсюда вытекает, что произведение Π всех чисел x_{mn} равно дроби, числитель которой равен произведению всех попарных разностей чисел $1, 2, \ldots, 20$. В знаменателе дроби находится то же самое произведение разностей (возможно, соответствующие разности в числителе и знаменателе отличаются знаком). Отсюда и следует, что П равно $+1$ или -1.

8.5. **Ответ.** 8.

Перепишем левую часть равенства как $\overline{ABA}\cdot\overline{AA} = (101A+10B)\cdot 11A = 1111A^2 + 110AB$, а правую — как $\overline{AB}\cdot\overline{AAA} - A = (10A+B)\cdot 111A - A = 1110A^2 + 111AB - A$, откуда $A^2 = AB - A$. Поделив на $A \neq 0$, получим $A = B - 1$. Так как $B \leqslant 9$, то решение существует для каждого $A = 1, 2, \ldots, 8$.

8.6. **Первое решение.** Разделим все монеты на две части по 20 монет и взвесим. Так как фальшивых монет нечетное число, то одна из кучек перевесит. Значит, в ней не более одной фальшивой монеты. Разделим её на две кучки по 10 монет и взвесим их. Если чашки весов оказались в равновесии, то все 20 взвешиваемых монет — настоящие. Если одна из чашек перевесила, то на ней 10 настоящих монет, а среди других 10 монет ровно одна фальшивая. Разделим эти 10 монет на три кучки, состоящих из 4, 4 и 2 монет. Третьим взвешиванием сравним две кучки по 4 монеты. Если они уравновесятся, то все 8 монет — настоящие и мы нашли 18 настоящих монет. Если одна из кучек перевесит, то в ней 4 настоящих монеты, в другой кучке есть фальшивая, а 2 отложенных монеты — настоящие. Всего найдено 16 настоящих монет.

Второе решение. Разделим все монеты на пять равных кучек, в каждой из которых по 8 монет, и пронумеруем их. Положим на одну чашку весов 1-ю и 2-ю кучки, а на другую — 3-ю и 4-ю.

Рассмотрим первый случай — весы уравновесились. Тогда либо на каждой чашке находится по одной фальшивой монете, либо все монеты во взвешивании настоящие. Тогда возьмем и взвесим 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет настоящие. Если одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет. Третьим взвешиванием сравниваем 3-ю и 4-ю кучки и определяем следующие 8 настоящих монет.

Теперь рассмотрим второй случай — весы не уравновесились. Пусть для определенности перевесили 1-я и 2-я кучки, тогда среди них не более одной фальшивой монеты. Вторым взвешиванием сравним 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет — настоящие. Если одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет, а в другой ровно одна фальшивая. Следовательно, в 3-й и 4-й кучках ровно две фальшивые монеты, а в 5-й кучке 8 настоящих монет. Значит, всего найдено 16 настоящих монет.

8.7. **Первое решение.** Обозначим середину отрезка BH через K, а точку, симметричную ей относительно BC, через L (см. рис. 3). Так как KL и HA_1 перпендикулярны BC, то KL параллельна HA_1, а в силу того, что K — середина BH, KL содержит среднюю линию треугольника BHA_1. Значит, в четырехугольнике BLA_1K диагонали BA_1 и KL делятся пополам точкой их пересечения. Тогда BLA_1K — параллелограмм, и $LA_1 \parallel BK$, а следовательно, $LA_1 \perp AC$. Значит, перпендикуляр к AC, проведенный через точку L, и есть LA_1.

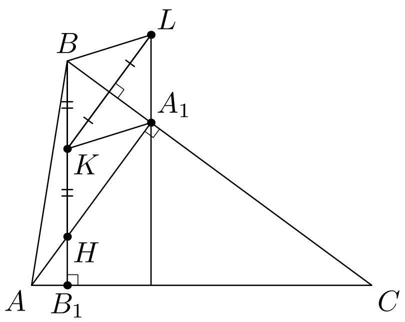

Рис. 3

Второе решение. Обозначим середину отрезка BH через K, а точку, симметричную ей относительно BC, через L. Так как A_1K — медиана прямоугольного треугольника BA_1H, то $KA_1 = KB$, откуда $\angle KBA_1 = \angle KA_1B$. В силу симметрии точек K и L относительно прямой BA_1, $\angle BA_1K = \angle LA_1B$. Значит, $\angle B_1BA_1 = \angle BA_1K = \angle BA_1L$, откуда следует параллельность прямых BB_1 и LA_1, или перпендикулярность LA_1 и AC.

8.8. Пусть по окружности расставлены числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Каждое слагаемое в сумме $T = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{13}) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{14}) + \ldots + (a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{12})$ не превосходит 13, и каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входит в эту сумму 13 раз. Поэтому $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = T/13 \leqslant n$.

Для решения задачи теперь достаточно доказать, что если $S = n$, то все числа равны 1. Будем говорить, что для расставленных чисел выполнено $C(k)$, если сумма любых k подряд идущих чисел равна k. Если $S = n$, то каждая скобка в сумме T равна 13, т. е. выполнено условие $C(13)$. Аналогично, если $S = n$, то выполнено условие $C(21)$.

Заметим, что если при натуральных $a > b$ выполняются условия $C(a)$ и $C(b)$, то выполняется и условие $C(a - b)$. Действительно, возьмем любые $a - b$ подряд идущих чисел и следующие за ними b чисел. Сумма b чисел равна b, а сумма всех этих a чисел равна a, значит, сумма данных $a - b$ чисел равна $a - b$.

Значит, из условий $C(21)$ и $C(13)$ последовательно выводим условия $C(21 - 13) = C(8)$, $C(13 - 8) = C(5)$, $C(8 - 5) = C(3)$, $C(5 - 3) = C(2)$, $C(3 - 2) = C(1)$. Но условие $C(1)$ и означает, что все числа на окружности равны 1.