10 класс

Первый день

10.1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, …, ровно семь — на 2?

10.2. Даны числа a, b, c. Известно, что для любого x выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$.

10.3. Дан треугольник ABC. Через точку X, лежащую внутри него, проводятся отрезок c_X, параллельный AB, с концами на сторонах AC и BC, и отрезок b_X, параллельный AC, с концами на сторонах AB и CB. Докажите, что все точки X, для которых длины отрезков b_X и c_X равны, лежат на одной прямой.

10.4. На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{\text{99 единиц}}$. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За ход игрок либо записывает ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стирает один из нулей. Проигрывает тот, после чьего хода на доске в первый раз появится число, делящееся на 11. Кто выигрывает при правильной игре?

10 класс

Второй день

10.5. В строку выписываются друг за другом без пробелов все натуральные числа в порядке возрастания: $1234567891011\ldots$. Какая из последовательностей цифр встретится в строке раньше: последовательность ровно из 2006 подряд идущих шестерок (слева и справа от которой стоят не шестерки) или последовательность ровно из 2007 семерок (слева и справа от которой стоят не семерки)?

10.6. Пусть AB и CD — две перпендикулярные хорды окружности с центром O, пересекающиеся в точке E; пусть также N и T — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ENOT$ — параллелограмм.

10.7. На доске написаны натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 10$. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, если числа a и b уже записаны. Можно ли с помощью таких операций получить число 1000000?

10.8. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых n дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на n округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов.