11 класс

Первый день

11.1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, …, ровно семь — на 2?

11.2. Даны числа a, b, c. Известно, что для любого x выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$.

11.3. Боковое ребро четырехугольной пирамиды назовем *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведенные в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковых ребра — хорошие, то четвертое боковое ребро также является хорошим.

11.4. В стране n городов, некоторые пары из которых соединены непересекающимися дорогами. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до любого другого, причем единственным способом (если не проезжать по одной дороге более одного раза). Докажите, что министр может объявить не более, чем $\frac{n}{51}$ городов закрытыми (и запретить въезд в них и выезд из них) так, чтобы после этого для любой пары городов X, Y выполнялось одно из двух условий: либо из X нельзя добраться до Y, либо из X можно добраться до Y, проехав не более, чем по 49 дорогам.

11 класс

Второй день

11.5. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2.$$

11.6. Пусть AB и CD — две перпендикулярные хорды окружности с центром O, пересекающиеся в точке E; пусть также N и T — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ENOT$ — параллелограмм.

11.7. На клетчатой полоске $1 \times n$ двое играют в следующую игру. Каждым своим ходом первый игрок закрашивает одну незакрашенную клетку, а второй — две рядом стоящие незакрашенные. Если игрок не может сделать хода — он выиграл. Кто выиграет при правильной игре?

11.8. Найдите все четверки целых чисел (x, y, z, t) таких, что их сумма равна 0, а число $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ является квадратом целого числа.