8 класс

Первый день

8.1. Найдите наименьшее четырехзначное число такое, что произведение его цифр, увеличенных на 1, равно 21.

8.2. Докажите, что если точка, которая делит одну из сторон треугольника в отношении $1 : 3$, равноудалена от середин двух других сторон, то треугольник — прямоугольный.

8.3. При каком наименьшем n на шахматную доску можно поставить n ладей и n слонов так, чтобы любая ладья била хотя бы двух слонов, а любой слон бил хотя бы две ладьи?

8.4. На координатной плоскости проведено 20 прямых — графиков линейных функций $y = k_1x+b_1$, $y = k_2x+b_2$, $\ldots$, $y = k_{20}x+b_{20}$, где каждый из коэффициентов $k_1, k_2, \ldots, k_{20}, b_1, b_2, \ldots, b_{20}$ равен одному из чисел $1, 2, \ldots, 20$. Известно, что любые две прямые пересекаются в точке, не лежащей на оси ординат, но никакие три не проходят через одну точку. Отмечены точки пересечения всех пар прямых. Докажите, что модуль произведения абсцисс всех отмеченных точек равен 1.

8 класс

Второй день

8.5. Сколько решений имеет числовой ребус

$$\overline{ABA} \cdot \overline{AA} = \overline{AB} \cdot \overline{AAA} - A,$$

где A и B — различные цифры, $A \neq 0$?

8.6. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивых — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет?

8.7. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, H — точка их пересечения. Через точку, симметричную середине отрезка BH относительно прямой BC, провели прямую, перпендикулярную стороне AC. Докажите, что она пересекает прямую BC в точке A_1.

8.8. По кругу расставлены $n > 2007$ чисел, не все из которых равны. Известно, что сумма любых 13 стоящих подряд чисел не превосходит 13, а сумма любых 21 стоящих подряд чисел не превосходит 21. Докажите, что сумма всех чисел строго меньше n.