Математика

10 класс.

1. Решить уравнение в целых числах:

$(x – y)^3 + (y – z)^3 + (z – x)^3 = 30$. (6 баллов)

Решение. Преобразовав данное уравнение, получим:

$3(x – y)(y – z)(z – x) = 30$ или $(x – y)(y – z)(z – x) = 10$.

Значит, целые числа $(x – y)$, $(y – z)$, $(z – x)$ — делители числа 10, сумма этих делителей равна нулю. Не трудно убедиться, что таких делителей у числа 10 нет.

2. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом сделали то же самое и так далее, 100 раз. Доказать, что в результате получится нуль. (6 баллов)

Решение. Так как $\overline{abc} – (a + b + c) = 9 \cdot (11a + b)$, то первая разность делится на 9. Сумма ее цифр делится на 9, значит, вторая, и, аналогично, все остальные разности будут делиться на 9.

Сумма цифр трехзначного числа, делящегося на 9, может быть равна 9, 18 или 27. Значит, за 100 операций число либо станет равным 0, либо уменьшится не менее чем на 900. Поэтому, любое число, меньшее 900, станет равным нулю.

Пусть число не менее 900. Тогда после первого хода получится число, кратное 9, от $900 – 9 = 891$ до $999 – 27 = 972$. Таких чисел 9. Перебором можно убедиться, что они также обратятся в 0 через 99 операций.

3. Существуют ли всюду определенные функции $f(x)$ и $g(y)$, что для любых x и y выполняется $f(x) \cdot g(y) = x + y – 1$? (6 баллов)

Решение. Пусть такие функции существуют. Тогда при любом y

при $x = 0$: $f(0) \cdot g(y) = y – 1$,

при $x = 1$: $f(1) \cdot g(y) = y$.

Очевидно, что $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$, отсюда

$$g(y) = \frac{y-1}{f(0)} = \frac{y}{f(1)}.$$

Это равенство выполняется не при всех y (при $y = 0$ оно неверно), значит, таких функций не существует.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+12}+\frac{1}{x+14}=0\,. \qquad \text{(6 баллов)}$$

Р е ш е н и е. Подстановка $y = x + 7$ делает рассматриваемое уравнение симметричным:

$$\frac{1}{y-7}+\frac{1}{y-5}-\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+3}+\frac{1}{y+5}+\frac{1}{y+7}=0\,.$$

Сгруппируем следующим образом

$$\left(\frac{1}{y-7}+\frac{1}{y+7}\right)+\left(\frac{1}{y-5}+\frac{1}{y+5}\right)-\left(\frac{1}{y-3}+\frac{1}{y+3}\right)-\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right)=0.$$

Это даёт

$$\frac{2y}{y^2-49}+\frac{2y}{y^2-25}-\frac{2y}{y^2-9}-\frac{2y}{y^2-1}=0\,,$$

т.е.

$$2y\left(\frac{1}{y^2-49}+\frac{1}{y^2-25}-\frac{1}{y^2-9}-\frac{1}{y^2-1}\right)=0\,,$$

откуда $y = 0$, т.е. $x = -7$, или (после подстановки $z = y^2$)

$$\frac{1}{z-49}+\frac{1}{z-25}-\frac{1}{z-9}-\frac{1}{z-1}=0\,.$$

Группируем

$$\left(\frac{1}{z-49}-\frac{1}{z-1}\right)+\left(\frac{1}{z-25}-\frac{1}{z-9}\right)=0\,.$$

Это даёт

$$\frac{48}{z^2-50z+49}+\frac{16}{z^2-34z+225}=0\,.$$

Сокращая на 16 и приводя к общему знаменателю, получаем

$$3(z^2 - 34z + 225) + (z^2 - 50z + 49) = 0$$

и, разумеется, $z \neq 1$, $z \neq 9$, $z \neq 25$, $z \neq 49$. Приводя подобные, имеем $4{\cdot}z^2 - 152z + 724 = 0$, откуда, сокращая на 4, получаем $z^2 - 38z + 181 = 0$. Корнями этого уравнения являются

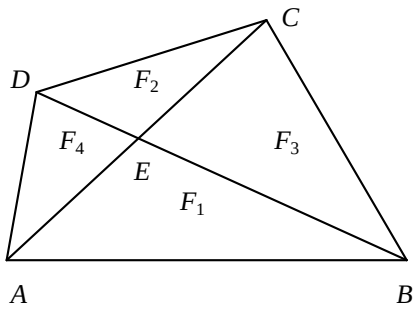
$$z = y^2 = 19 \pm 6\sqrt{5}\,,$$

откуда $y = \pm\sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$ и, наконец, $x = y - 7 = -7 \pm \sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$, причём возможны различные комбинации знаков.

О т в е т: $x = -7$, $x = -7 \pm \sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$. □

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ с внутренними углами $< 180^o$ точка E – точка пересечения диагоналей, F_1, F_2 – площади треугольников ΔABE, ΔCDE, F – площадь четырёхугольника $ABCD$. Доказать, что $\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} \le \sqrt{F}$. В каком случае возможно равенство? (6 баллов)

Р е ш е н и е.



Имеем $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$. Доказываемое неравенство равносильно тогда неравенству

$$0 < \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} \le \sqrt{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}\,.$$

После возведения в квадрат получаем, что последнее равносильно неравенству

$$2 \cdot \sqrt{F_1}\sqrt{F_2} \le F_3 + F_4\,.$$

Треугольники ΔABE и ΔADE имеют одинаковую высоту, следовательно, $\frac{F_1}{F_4} = \frac{BE}{DE}$. Аналогично, $\frac{F_3}{F_2} = \frac{BE}{DE}$. Отсюда получаем $\frac{F_1}{F_4} = \frac{F_3}{F_2}$, так что $F_1F_2 = F_3F_4$. Доказываемое неравенство сводится тогда к такому: $2\sqrt{F_3}\sqrt{F_4} \le F_3 + F_4$. Это последнее неравенство очевидно, поскольку $F_3 - 2\sqrt{F_3}\sqrt{F_4} + F_4 = (\sqrt{F_3} - \sqrt{F_4})^2 \ge 0$.

Равенство достигается в случае $F_3 = F_4$. В свою очередь это равносильно условию $S_{\Delta ABD} = F_1 + F_4 = F_1 + F_3 = S_{\Delta ABC}$. Но треугольники ΔABC и ΔABD имеют общее основание AB, следовательно, должны иметь одинаковые высоты. А это выполняется в случае, когда AD параллельно CD, т.е. когда $ABCD$ – трапеция. □