Всероссийская олимпиада школьников 2011г
II (муниципальный) этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 4 астрономических часа.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

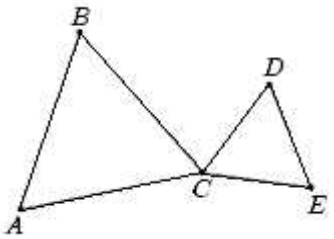
Задание 1
Рассмотрим квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2011$. Доказать, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
Количество баллов 7
Решение
(Подсказка. $1 + p + q$ – это значение квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ в точке $x = 1$.)
Подберем такое значение x, чтобы выражение $p + q$ было связано со значением квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ в точке x. Возьмем $x = 1$. Тогда $y(1) = 1 + p + q$, что равняется $1 + 2011 = 2012$, согласно условию. Итак, для всех выписанных квадратичных функций выполнено $y(1) = 2012$. Но это означает, что каждый из графиков этих квадратичных функций проходит через точку (1, 2012) координатной плоскости.

Задание 2
Докажите неравенство для любых a, b, c:
$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$$
Количество баллов 7
Решение
Переносим все на одну сторону и выделяем полный квадрат:
$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc = \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \geq 0$$

Задание 3
Какую цифру надо поставить вместо знака "**?**" в числе 888...88**?**99...999 (восьмёрка и девятка написаны по 50 раз), чтобы оно делилось на 7?
Количество баллов 7
Ответ
5

Решение
Заметим, что число 111111 делится на 7, а 10 взаимно просто с 7, поэтому из исходного числа можно вычитать $111111 \cdot 10^n$ и делить результаты на 10^k без изменения остатка. Таким образом, задача сводится к такой же для числа 88***?***99, которое можно записать как 88000 + 100·*?* + 99. Остаток от деления на 7 у этого числа равен 3 + 2·*?* + 1. Следовательно, число 4 + 2·***?*** делится на 7, откуда ***?*** = 5.

Задание 4
Два равносторонних треугольника *ABC* и *CDE* имеют общую вершину (смотрите рисунок). Найдите угол между прямыми *AD* и *BE*.



Количество баллов 7
Ответ
60^0
Решение
Пусть – точка пересечения *AD* и *BE* (см. рис. а). Заметим, что Δ*ACD* = Δ*BCE* (по двум сторонам и углу между ними), откуда следует, что ∠*DAC* = ∠*EBC*. Тогда ∠APB = 180° – (∠*PAB* + ∠*PBA*) = 180° – (∠*CAB* + ∠*CBA*) = 60°.

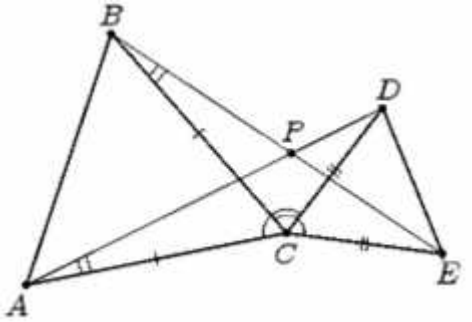


Рис. а

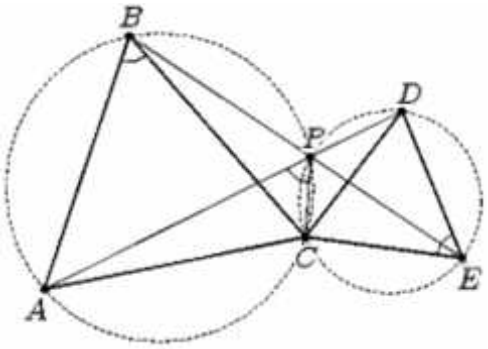


Рис. б

Задание 5
Бумажный квадрат был проколот в 2011 точках. Из точек-проколов и вершин квадрата никакие три не лежат на одной прямой. Потом сделали несколько прямолинейных не пересекающихся между собой разрезов, каждый из которых начинался и кончался только в проколотых точках или вершинах квадрата. Оказалось, что квадрат разрезан на треугольники, внутри которых проколов нет. Сколько было сделано разрезов и сколько получилось треугольников?
Количество баллов 7
Ответ
6034 разрезов, 4024 треугольника.
Решение
Решим задачу в общем случае, когда квадрат проколот в *n* точках. Пусть число полученных треугольников равно *x*. С одной стороны, сумма углов всех этих треугольников равна $x \cdot 180^o$. С другой стороны, она равна $360^o + n \cdot 360^o$ (сумма углов квадрата и сумма углов 360^o при *n* вершинах). Следовательно, *x* = 2*n* + 2. Пусть число проведённых разрезов равно *y*. С одной стороны, число сторон полученных треугольников равно 3*x*. С другой стороны, оно равно 4 + 2*y* (каждая сторона квадрата учитывается один раз, а каждый разрез – два раза). Отсюда получаем ответ.