РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАСС

Общие замечания по проверке:

Почти у всех задач критерии написаны на основании «приведенного» к задаче решения. В случае «другого» решения нужно выработать другие критерии в соответствии с общими требованиями к критериям.

11 класс

1. *Известно, что квадратные трехчлены* $x^2 + px + q$ *и* $x^2 + qx + p$ *имеют различные действительные корни. Рассмотрим всевозможные парные произведения корней первого квадратного трехчлена на корни второго (всего таких произведений четыре). Докажите, что сумма обратных величин данных произведений не зависит от p и q.*

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни первого трехчлена и x_3, x_4, тогда необходимо доказать, что $\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4}$ не зависит от p и q. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4}=\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)+\frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}\right)$$

По теореме Виета имеем: $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q \end{cases}$ и $\begin{cases} x_3+x_4=-q \\ x_3x_4=p \end{cases}$

Тогда $\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4}=\frac{-p(-q)}{qp}=1$.

2. *Числа tg x, tg 2x, tg 3x, являются членами геометрической прогрессии. Найдите знаменатель прогрессии.*

Ответ: $1 \pm \sqrt{2}$.

Решение. Так как числа $tgx, tg2x, tg3x$ являются членами геометрической прогрессии, то $tgx \neq 0$ и $tg^2x \neq 1$, $tg^2x \neq \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} tg2x = qtgx \\ tg3x = q^2tgx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2tgx}{1-tg^2x} = qtgx \\ \frac{3tgx - tg^3x}{1-3tg^2x} = q^2tgx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1-tg^2x} = q \\ \frac{3-tg^2x}{1-3tg^2x} = q^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg^2x = 1-\frac{2}{q}, \\ \frac{3-\left(1-\frac{2}{q}\right)}{1-3\left(1-\frac{2}{q}\right)} = q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg^2x = 1-\frac{2}{q} \\ \frac{q+1}{3-q} = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg^2x = 1-\frac{2}{q} \\ q^3-3q^2+q+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg^2x = 1-\frac{2}{q} \\ (q-1)(q^2-2q-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg^2x = 1-\frac{2}{q} \\ \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=1+\sqrt{2} \\ q=1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} tg^2x = (\sqrt{2}-1)^2 \\ q=1+\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} tg^2x = (\sqrt{2}+1)^2 \\ q=1-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Рекомендации по проверке. Все значения q найдены, но не исключено q=1 – 6 баллов.

3. *Решить уравнение в целых числах* $x^4 - 2y^4 - 4z^4 - 8t^4 = 0$.

Ответ: $x = y = z = t = 0$

Решение. Заметим, что x –четное. Пусть $x=2x_1$, тогда получаем, что $8x_1^4 - y^4 - 2z^4 - 4t^4 = 0$, но тогда y –четное. Пусть $y=2y_1$, тогда $4x_1^4 - 8y_1^4 - z^4 - 2t^4 = 0$. Следовательно, $z=2z_1$ и $2x_1^4 - 4y_1^4 - 8z_1^4 - t^4 = 0$. Аналогично $t=2t_1$ и $x_1^4 - 2y_1^4 - 4z_1^4 - 8t_1^4 = 0$ получаем исходное уравнение, но для переменных x_1, y_1, z_1, t_1, следовательно, для них мы можем проделать те же самые рассуждения и т.д. Получаем, что каждая переменная делится на произвольную степень 2. Следовательно, $x=y=z=t=0$.

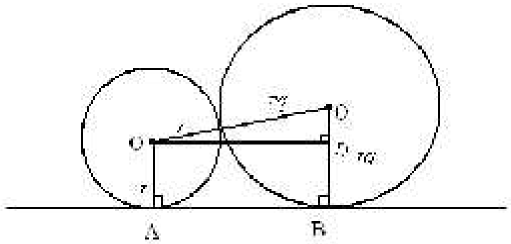
Рекомендации по проверке.

1) Замечено, что x –четное – 1 балл.
2) С помощью верных рассуждений получено уравнение $x_1^4 - 2y_1^4 - 4z_1^4 - 8t_1^4 = 0$, где $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$, $t=2t_1$, но нет соответствующего вывода – 4 балла.
3) Приведен только ответ без доказательства, что других решений нет – 0 баллов.

4. *На столе лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Радиусы мячей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q≠1. Радиус среднего из них равен 2012. Найдите отношение суммы квадратов сторон треугольника, образованного точками касания мячей стола, к сумме сторон треугольника образованного центрами мячей.*

Ответ:4024

Решение. Пусть радиус меньшего из мячей равен r, тогда радиусы остальных rq=2012 и rq^2, а точки касания мячей стола обозначим A, B, C соответственно. Рассмотрим сечение двух мячей плоскостью перпендикулярной плоскости стола и проходящей через центры данных мячей (см. рисунок, для двух меньших по величине мячей). Тогда для шаров приведенных на рисунке получаем, что $OA=r$, $O_1B=rq$ и $OO_1=r+rq$. Далее, $O_1D=O_1D–DC= O_1B–OA=r(q–1)$. Из ΔOO_1D по теореме Пифагора получаем, что $OD=2r\sqrt{q}=AB$. Аналогично, рассматривая оставшиеся пары мячей, получим, что $AC=2rq$, $BC=2rq\sqrt{q}$, тогда искомая величина равна



$$\frac{4r^2q+4r^2q^2+4r^2q^3}{r(1+q)+r(q+q^2)+r(1+q^2)}=2rq=2\cdot 2012=4024$$

Рекомендации по проверке. За вычисление всех сторон треугольника, образованного точками касания мячей – 2 балла.

5. *Школьник Петя на карточках выписывал три натуральных числа, каждое из которых от* 1 *до* 20. *Причем нет двух карточек с одним и тем же набором чисел. Докажите, что найдутся две карточки, имеющие ровно одно общее число, если известно, что Петя заполнил* 21 *карточку.*

Решение. Докажем от противного. Тогда не существуют двух карточек, имеющих ровно одно общее число. Назовем карточки «похожими», если они имеют два общих числа.

Лемма: *Если карточки A, B «похожие» и карточки B, C «похожие», тогда карточки A и C тоже «похожие».*

Доказательство. Пусть карточка A состоит из чисел a, b, c, а карточка B состоит из чисел a, b, d. Тогда число a или b должно входит в карточку C, так как карточки B и C «похожие». Но так у карточек A и C не может быть одного общего числа, значит их два, т.е карточки A и C «похожие».

Из леммы следует, что все карточки можно разбить на группы так, что в одну группу попадают только «похожие» карточки. Тогда возможны следующие три ситуации:

1) Группа содержит только карточки, на которых написаны только три различных числа, но тогда данная группа содержит только одну карточку с данными числами.
2) Группа содержит только карточки, на которых написано четыре различных числа. Но тогда карточек в группе не более 4.
3) Группа содержит более четырех различных чисел.

Пусть карточка A состоит из чисел a, b, c, а карточка B состоит из чисел a, b, d. Пусть существует число e, отличное от чисел a, b,c,d написанное на какой-либо карточке C из этой группы. А так как все карточки в группе «похожие», то карточка C должна содержать числа a, b. Таким образом, все карточки данной группы должны содержать числа a, b. Значит число карточек в данной группе ровно на два меньше чем число чисел используемых в данных карточках. Таким образом получаем, что всего карточек не больше количества используемых чисел. Получили противоречие.

Составитель всех задач 11 класса К.В. Трунов.
Задача 4 составлена совместно с В.И. Луценко.