Всероссийская олимпиада школьников 2012г
II (муниципальный) этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 4 астрономических часа.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1
Известно, что сумма трех плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна 180^0.
Докажите, что все его грани - равные треугольники.
Количество баллов 7
Решение
Пусть данный тетраэдр – ABCD. Рассмотрим его развертку на плоскость ABC. Пусть грани ABD, BCD и CAD при разворачивании тетраэдра перешли в треугольники ABE, BCF и CAG. Сумма углов EAB, BAC, CAG равна 180^0, поскольку эти углы равны трем плоским углам тетраэдра при вершине A. Следовательно, точка A лежит на прямой EG. Аналогично доказывается, что точка B лежит на прямой EF и точка C лежит на прямой FG. Таким образом, развертка представляет собой треугольник EFG. Точки A, B, C лежат на его сторонах GE, EF, FG. Кроме того EA=AG, поскольку отрезки EA и AG равны ребру AD тетраэдра. Аналогично, EB=BF и FC=CG. Это означает, что AB, CB, CA - средние линии треугольника EFG. Средние линии делят треугольник EFG на 4 равных треугольника ABE, BCF, CAG и ABC, которые равны, соответственно граням ABD, BCD, CAD и ABC тетраэдра ABCD. Итак, все грани – равные треугольники.

Задание 2
На отрезке [0; 1] числовой оси расположены четыре точки: a, b, c, d. Докажите, что найдётся точка x, принадлежащая [0; 1], такая, что $(1/|x - a|) + (1/|x - b|) + (1/|x - c|) + (1/|x - d|) < 40$.
Количество баллов 7
Решение
Точки a, b, c, d делят отрезок [0; 1] не более чем на пять частей; хотя бы одна из этих частей является интервалом длины не меньше 0,2. Возьмём за x центр этого интервала. Расстояние от x до концов этого интервала не меньше 0,1, а до других точек из числа a, b, c, d – больше 0,1. Поэтому два из чисел $|x – a|$, $|x – b|$, $|x – c|$, $|x – d|$ не меньше 0,1, а остальные два строго больше 0,1. Так что все обратные величины не больше 10, а две из них строго меньше 10. Тогда сумма обратных величин меньше 40, что и требуется.

Задание 3
Условие
Значение *a* подобрано так, что число корней уравнения: $4^x - 4^{-x} = 2\cos ax$ равно 2012.
Сколько корней при том же *a* имеет уравнение $4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4$?
Количество баллов 7
Ответ: 4024
Решение
Преобразуем второе уравнение:

$$4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$4^x - 2 + 4^{-x} = 2(1 + \cos ax) \quad \Leftrightarrow$$

$$(2^x - 2^{-x})^2 = 4\cos^2 \frac{ax}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 4^{x/2} - 4^{-x/2} = 2\cos\dfrac{ax}{2} \\ 4^{x/2} - 4^{-x/2} = -2\cos\dfrac{ax}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 4^{x/2} - 4^{-x/2} = 2\cos\dfrac{ax}{2} \\ 4^{-x/2} - 4^{x/2} = 2\cos\dfrac{ax}{2} \end{array}\right.$$

Оба уравнения этой совокупности сводятся к первому уравнению из условия задачи заменами $x = 2y$ и $x = -2z$ соответственно. Поэтому каждое из этих двух уравнений имеет 2012 корней. Если эти уравнения имеют общий корень $x = x_0$, то

$$4^{x_0/2} - 4^{-x_0/2} = 0$$

и

$$\cos\frac{ax_0}{2} = 0$$

что невозможно. Следовательно, эти уравнения не имеют общих корней, а второе уравнение из условия задачи имеет 2·2012 = 4024 корней.

Задание 4
На небе бесконечное число звезд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом любые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.
Количество баллов 7
Решение
Пусть среди натуральных чисел, выражающих яркость звезд, наименьшим числом является m. Выберем некоторую звезду A яркости m; пусть размер звезды A выражается числом s. Далее, пусть среди натуральных чисел, выражающих размер звезд, наименьшим числом является n. Выберем некоторую звезду B размера n; пусть яркость звезды B выражается числом t. Звезд, имеющих одновременно яркость не больше t и размер не больше s, конечное число. Следовательно, либо найдется звезда размера больше s (и тогда она и по яркости, и по размеру не уступает звезде A), либо найдется звезда яркости больше t (и тогда она и по яркости, и по размеру не уступает звезде B).

Задание 5

На доске написано n выражений вида $*x^2+*x+*=0$ (n – нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через 3n ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок при правильной игре второго?

Количество баллов 7

Ответ: $(n + 1)/2$.

Решение

Приведем стратегию первого игрока, позволяющую ему получить не менее $(n + 1)/2$ уравнений, не имеющих корней. Назовем распечатыванием выражения первую замену в нем звездочки на число. Своим первым ходом, а также в ответ на любой распечатывающий ход второго игрока, первый игрок распечатывает одно из оставшихся выражений, записывая число1 перед x. Если второй игрок записывает число a перед x^2 или вместо свободного члена в выражении, распечатанном первым, то в ответ первый записывает на оставшееся место число $1/a$. Дискриминант получившегося уравнения ($D = 1 - 4a\cdot(1/a) = -3$) отрицателен, поэтому оно не имеет корней. Если же второй игрок запишет число вместо одной из двух звездочек в ранее распечатанном им выражении, то первый произвольным образом заполняет в этом выражении оставшееся место. Ясно, что описанная стратегия позволяет первому игроку распечатать $(n + 1)/2$ выражений, которые он в ходе игры превращает в уравнения, не имеющие корней. Осталось показать, что второй игрок, мешая первому, может получить $(n – 1)/2$ уравнений, имеющих корни. В самом деле, второй игрок может $(n – 1)/2$ раз распечатать выражения, записывая число1 перед x^2 . Тогда, как бы ни играл первый игрок, второй сумеет поставить еще по одному числу в каждое из распечатанных им выражений. Если место свободного члена не занято, то, записывая на него число -1 , второй игрок обеспечивает получение уравнения с положительным дискриминантом. Если же вместо свободного члена первым игроком было записано число c , то второму достаточно записать перед x число b,

$$b > 2\sqrt{|c|}$$

и дискриминант полученного уравнения окажется положительным.