РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАСС

Общие замечания по проверке:

Почти у всех задач критерии написаны на основании «приведенного» к задаче решения. В случае «другого» решения нужно выработать другие критерии в соответствии с общими требованиями к критериям.

1. *Существует ли* 2012 *целых чисел произведение которых равно двум, а сумма равна нулю?*

Ответ: не существует.

Решение. Поскольку произведение целых чисел равно 2, то одно из этих чисел (если они существуют) должно равняться ±2, а остальные 2011 равны ±1. Но сумма 2011 нечётных чисел и одно чётного является нечётной и значит не равна нулю. Противоречие.

Критерии проверки. Из равенства произведения двум сделан вывод что одно чётное а, остальные нечётные, но противоречие не указано: 2 балла.

2. *Мистер Твистер хочет купить завод, газету и пароход. Если он купит только завод, то у него останется* 3 *млн. долларов. Если он купит пароход, то у него останется* 4 *млн. долларов. Если же он купит газету, то у него останется* 8 *млн. долларов. Хватит ли денег у Мистера Твистера, чтобы купить одновременно завод, газету и пароход?*

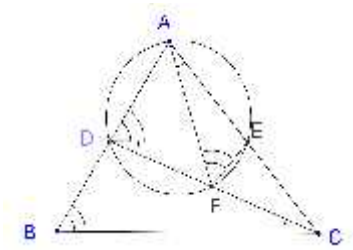
Ответ: Не сможет.

Решение. Пусть завод стоит z млн. долларов, газета стоит g млн. долларов, пароход стоит p млн. долларов, а у мистера Твистера имеется S млн. долларов. Тогда условия задачи можно записать так S–z=3, S–p=4, S–g=8. Если у него не хватит денег на покупку завода, газеты и парохода, то z+g+p>S. Это неравенство равносильно следующему S–3+S–4+S–8>S или S>7,5, что верно, так как после покупки газеты у него остается 8 млн. долларов. А это значит, что он не сможет купить одновременно завод, пароход и газету.

Критерии проверки. Составлены три уравнения и неравенство, но верность неравенства не обоснована: 2 балла.

3. *Пусть ABC - остроугольный треугольник. Прямая параллельная стороне BC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Окружность описанная около треугольника ADE пересекает отрезок CD в точке F отличной от точки D. Доказать, что треугольники AFE и CBD подобны.*

Решение. Поскольку прямые DE и BC параллельны, то ∠DCB = ∠CDE, кроме того углы вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну дугу равны: ∠FDE = ∠FAE, значит ∠DCB = ∠CDE = ∠FDE =∠FAE. Аналогично ∠ABC = ∠ADE = ∠AFE. Таким образом в этих треугольниках имеется по два равных угла и значит они подобны.



4. *Числа* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2012}$ *принадлежат промежутку* [0;1]. *Доказать неравенство*

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2012} + (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots(1-x_{2012}) \le 1.$$

При каких значениях $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2012}$ *может достигаться равенство?*

Ответ: Равенство достигается при

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{2012} = 1, \text{ или } x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{2012} = 0,$$

Решение. Если число *m* лежит в промежутке [0;1], то и число 1–*m* тоже лежит в этом промежутке, а также произведение чисел из этого промежутка также ему принадлежит и поскольку для любых двух чисел *a* и *b* из промежутка [0;1] выполняется неравенство $ab \le a$, то

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2012} + (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots(1-x_{2012}) \le x_1 + 1 - x_1 = 1.$$

Неравенство обращается в равенство только при указанных в ответе значениях.

Критерии проверки. Не указаны условия равенства минус один балл.

5. *Даны* 10 *точек, являющихся вершинами выпуклого десятиугольника. Какое наибольшее число треугольников с вершинами в этих точках можно выбрать таким образом, чтобы каждый треугольник имел сторону, не являющуюся стороной других выбранных треугольников?*

Ответ: 9×8/2 = 36.

Решение. Пример, когда треугольников именно столько, получается, если рассмотреть все треугольники с вершиной в данной точке *A*: у каждого из них сторона, противолежащая вершине *A*, уникальна, т.е. не входит ни в какой другой из них. Покажем, что большего числа треугольников выбрать не удастся. Каждый отрезок с концами в данных точках входит в 8 треугольников с вершинами в данных точках. Всего отрезков с концами в данных 10 точках имеется 10×9/2 = 45. Если выбрано больше 36 треугольников, то неуникальных сторон будет не больше, чем 45 – 37 = 8, и каждая считается в составе выбранных треугольников не больше 8 раз. Поэтому всего у выбранных треугольников должно быть не больше 8×8+37 = 101 сторон. Однако, на самом деле их 3×37 = 111. Противоречие.

Составитель всех задач 9 класса Р.Г. Женодаров