11 класс

1. У натурального числа сумма цифр 2013. Следующее за ним имеет меньшую сумму цифр и не кратно 4. Какова сумма цифр следующего натурального числа.
Ответ: 2005.
Решение. Сумма цифр у следующего числа уменьшается только в том случае, если оно оканчивается на девятку.
На две и более девяток оно оканчиваться не может, так следующее будет оканчиваться двумя нулями и будет кратно 4.
Значит, 9 заменена на 0, но цифра десятков увеличилась на 1.
Сумма цифр следующего числа 2013-9+1=2005.
Критерии проверки.
Ответ без обоснований: 0 баллов.
Не объяснено, что девятка только одна: 4 баллов.

2. Найдите количество всех семизначных натуральных чисел, у которых цифры в десятичной записи идут в строго возрастающем порядке до середины, а далее в строго убывающем порядке. Например, подойдет число 1358620.

Решение.

Если средняя цифра семизначного числа 4 (меньше не может быть), то количество искомых чисел можно получить зачеркиванием в числе 123 4 3210 одного знака правее “4”- средней цифры итогового числа. Таких чисел 4.

Если средняя цифра семизначного числа 5, то количество искомых чисел можно получить зачеркиванием в числе 1234 5 43210 одного знака левее “5”- средней цифры итогового числа и двух знаков правее. Таких вариантов $C_4^1 C_5^2 = 4 \cdot 10$.

Аналогично, если средняя цифра семизначного числа 6, то количество “подходящих” равно $C_5^2 C_6^3 = 10 \cdot 20$.

Для средней цифры 7, таких числовых вариантов будет $C_6^3 C_7^4 = 20 \cdot 35$.

Для 8 и 9, получим, соответственно, $C_7^4 C_8^5 = 35 \cdot 56$ и $C_8^5 C_9^6 = 56 \cdot 84$.

Итого 4+4·10+10·20+20·35+35·56+56·84=

=4·11+20·(10+35)+56·(84+35) =7608. Ответ: 7608.

Рекомендации по проверке.

Угадано решение: 0 баллов.

3. Определите наименьшее произведение положительных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$20ab = 13a + 14b.$$

Ответ: 1,82.

Решение.

$$(20ab)^2 = (13a + 14b)^2 = (13a)^2 + (14b)^2 + 2 \cdot 13a \cdot 14b \geq$$

$$\geq 2 \cdot 13a \cdot 14b + 2 \cdot 13a \cdot 14b = 4 \cdot 13a \cdot 14b. \Rightarrow$$

$$20^2 ab \geq 4 \cdot 13 \cdot 14 \Rightarrow 20^2 ab \geq 4 \cdot 13 \cdot 14 \Rightarrow ab \geq 1{,}82.$$

Мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

$$(13a)^2 + (14b)^2 \geq 2 \cdot 13a \cdot 14b.$$

Равенство достигается, когда $13a = 14b$. Например, при $a = 1{,}4$; $b = 1{,}3$. Ответ: 1,82.

Критерии проверки.

Если ответ приведен без указания условия достижимости, то 4 балла.

4. Решите следующее уравнение для положительных x.

$$x^{2014} + 2014^{2013} = x^{2013} + 2014^{2014}.$$

Ответ: 2014.

Решение. Перепишем уравнение в следующем виде $x^{2013}(x-1) = 2014^{2013}(2014-1)$. Решением является $x = 2014$. Так как функция слева, при $x < 1$, является отрицательной, то в этом случае решений нет. При $x > 1$ данная функция возрастает, как произведение двух положительных возрастающих функций, то пересечение с постоянной функции может быть не более одного и одно уже определено.

Критерии проверки.

Угадано решение: 0 баллов.

5. Известно, что в пирамиде *ABCD* с вершиной *D*, сумма $\angle ABD + \angle DBC = \pi$. Найдите длину отрезка DL, где *L* основание биссектрисы *BL* треугольника ABC, если известно, что

$$AB = 9, BC = 6, AC = 5, DB = 1.$$

Ответ: 7.

Решение. Пусть точка *M* лежит на прямой, вне отрезка *BC*, за точкой *B*. Из условия следует равенство углов $\angle ABD = \angle DBM$. Тогда проекция прямой *BD* на плоскость *ABC* является биссектрисой *BK* угла *ABM*. Биссектрисы *BK* и *BL* перпендикулярны, как биссектрисы внутреннего и внешнего углов. Также, прямой *BL* перпендикулярна и высота пирамиды *DH*. Поэтому *BL* $\perp$ DBK и, следовательно, *BL* $\perp$ DB и треугольник *LBD* прямоугольный с $\angle B = \pi/2$. Аналогично, рассматривается ситуация, когда точка *M* находится за точкой *C*. Из соотношения $CL/LA = BC/BA = 2/3$ находим, что *LC*=2, *AL*=3. Так как $BL^2 = AB \cdot BC - AL \cdot LC$, то и $BL^2 = 48$. По теореме Пифагора получаем $DL^2 = DB^2 + BL^2 = 49$. Ответ: 7.

Критерии проверки.

Угадано решение: 0 баллов.

Найдена длина биссектрисы: 1 балл.

Определено, что треугольник *LBD* прямоугольный: 4 балла.