Всероссийская олимпиада школьников 2013г
II (муниципальный) этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 4 астрономических часа.
Максимальное количество баллов-35

Общие критерии оценки:

7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1

Рассматривается последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Существует ли арифметическая прогрессия
а) длины 5,
б) длины 2013,
составленная из членов этой последовательности?

Количество баллов 7

Ответ: а) существует, б) существует.

Решение

Рассмотрим убывающую арифметическую прогрессию из n натуральных чисел (например, n, $n-1$, ..., 1).
Разделив все её члены на их НОК, получим прогрессию из указанных дробей. В частности, при $n = 5$ получаем

$$\frac{1}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}$$

Задание 2

Существует ли отличный от куба шестигранник, у которого все грани являются равными ромбами?

Количество баллов 7

Ответ: существует

Решение

Отложим от одной точки O пространства три равных по длине вектора a = OA, b = OB, c = OC, попарные углы между которыми равны и отличны от 90^0. После этого отложим от точки O векторы OD = a + b, OE = b + c, OF = c + a, OG = a + b + c. Нетрудно видеть, что вершины O, A, B, C, D, E, F будут являться вершинами параллелепипеда, гранями которого служат равные ромбы.

Задание 3

Пусть a ,b и c - длины сторон некоторого треугольника. Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx – c$ имеет ровно один корень на отрезке (0,1).

Количество баллов 7

Ответ:

Решение

Первое решение.

Значение трехчлена при x = 0 равно -c отрицательно, а при x = 1 равно a + b – c положительно, в силу неравенства треугольника. Следовательно, отрезок (0,1) содержит ровно 1 корень трехчлена. Если бы их было 2 или 0, то в силу вида графика квадратного трехчлена, значения на концах интервала были бы положительны.

Второе решение.

Находим корни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

уравнения $ax^2 + bx – c = 0$, замечаем, что корень с минусом отрицательный. Для корня с плюсом записываем неравенство

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 1,$$

которое при положительных a,b,c эквивалентно неравенству a + b > c, справедливому в силу неравенства треугольника.

Задание 4

Числа *x*, *y*, *z* удовлетворяют равенству:

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

Количество баллов 7

Ответ:

Решение

Заметим, что:

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(2z-1)$$

Если левая часть равенства равна нулю, то хотя бы один множитель справа равен нулю.

Значит, одно из чисел *x*, *y*, *z* равно $\frac{1}{2}$.

Задание 5

Известно, что уравнение $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ имеет действительный корень. Докажите, что тогда выполняется неравенство $a^2 + b^2 \geq 8$.

Количество баллов 7

Ответ:

Решение

Предположим, что $a^2 + b^2 < 8$. Тогда согласно неравенству Коши – Буняковского

$$|ax^3 + bx| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^6 + x^2} < 2\sqrt{2}\,|x|\sqrt{x^4 + 1}$$

Следовательно,

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 > x^4 + 1 - 2\sqrt{2}\,|x|\sqrt{x^4 + 1} + 2x^2 = \left(\sqrt{x^4 + 1} - 2|x|\right)^2 \geq 0$$

Противоречие.