8 класс

1. Ответ: Можно.

Решение. Если гирю в 9 г положить на одну чашку, а все остальные - на другую, то разница весов на чашках 1+2+3+...+8–9=27 (г), и к гире в 9 грамм досыпаем 27 г песка до уравновешивания.

Возможны другие способы. Важно только, что на одной чашке лежит масса в 9г, возможно, набранная при помощи нескольких гирь, остальные - на другой.

Критерии проверки.

Если 27г песка отвешено за более чем одно взвешивание, то 0 баллов.

Если обоснование состоит из равенства 1+2+3+...+8–9=27 или ему подобных: 5 баллов.

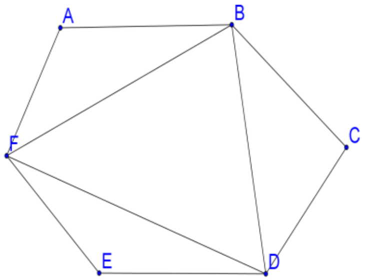
Если ответ "можно" без обоснований: 0 баллов.

2. Ответ: Может. Пример: 1670+298+45=2013. Примеров может быть много, но во всех них отсутствует цифра 3.

Критерии проверки.

Приведён пример: 7 баллов.

Если примера нет, но доказано, что отсутствовать может только цифра 3: 2 балла.



3. Ответ: Угол B - прямой.

Проведём диагонали FB, BD и DF.

Три треугольника: FAB, BCD, DEF - равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует FB=BD=DF. Значит, треугольник FBD - равносторонний и его углы равны по 60°. Все указанные треугольники - равнобедренные, поскольку шестиугольник равносторонний, и острые углы в них равны $(180°–150°)/2=15°$. Значит, $\angle B=\angle ABF+\angle FBD+\angle DBC=15°+60°+15°=90°$.

Критерии проверки.

Доказано равенство треугольников и их равнобедренность: 2 балла.

Доказано ещё, что треугольник FBD равносторонний: 3 балла.

Получен правильным вычислением ответ, но отсутствуют все указанные выше обоснования: 3 балла.

4. Ответ: 32.

Решение. Числа a, b, c, d – различные целые, поэтому числа $8–a$, $8–b$, $8–c$ и $8–d$ тоже целые и различные. Число 9 представляется в виде произведения четырех различных целых чисел единственным образом: $9=3\cdot(–3)\cdot(–1)\cdot1$ (с точностью до порядка множителей). Это следует из основной теоремы арифметики и различности множителей. Сумма этих множителей равна 0. Значит $8–a+8–b+8–c+8–d=0$, отсюда $a+b+c+d=32$.

Критерии проверки.

Только ответ: 0 баллов.

5. Если у обоих игроков нет не выложенных карточек, то они выложили пар карточек поровну. Рассмотрим игрока, у которого есть не выложенные карточки. Возьмём любую из них. И пусть остаток от деления на 25 числа, написанного на такой карточке, равен r. Поскольку на карточках 500 последовательных чисел, то всего на карточках чисел с таким остатком 500/25=20. Игроки выкладывают числа парами, и следовательно, есть еще не выложенная карточка с таким остатком. У данного игрока её быть не может, иначе он объединил бы их в пару и выложил, так как их разность кратна 25. Продолжая рассматривать не выложенные карточки данного игрока, убеждаемся, что у него и другого игрока не выложено одно и то же количество карточек. А, значит, и выложили они одинаковое количество пар карточек.

Критерии проверки.

Если указано, что не выложенных карточек у игроков поровну, но не обосновано: 2 балла.

9 класс

1. Было 2013 пустых коробок. В некоторую из них положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга). Таким образом, стало 2026 коробок. В некоторую из них снова положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга) и т.д. После нескольких таких операций стало 2013 непустых коробок. Сколько всего стало коробок? Ответ: 28182.

Решение.

После каждой операции количество непустых коробок увеличивается на 1. Вначале непустых коробок не было. Значит, всего было сделано 2013 операций. За каждую операцию прибавляется 13 новых коробок. Стало

2013+13×2013=2013×14=28182.

Рекомендации по проверке.

Только ответ или вычисления без комментариев: 1 балл.

2. Докажите, что неравенство $x^2-2x\sqrt{y-5}+y^2+y-30\geq 0$ выполняется при любых допустимых значениях x и y.

Решение. ОДЗ: x – любое число, $y\geq 5$.

$$x^2-2x\sqrt{y-5}+y^2+y-30=(x-\sqrt{y-5})^2+y^2-25\geq 0,$$

так как $(x-\sqrt{y-5})^2\geq 0$ и $y^2-25\geq 0$ при $y\geq 5$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$x^2(y+y^2)=y^3+x^4.$$

Решение.

$$x^2y+x^2y^2-y^3-x^4=0,$$