10.1. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

Ответ: да, может.

Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32°$. Если $T_F = T_C$, то $0{,}8T_C + 32 = 0$, то есть, $T_C = -40$.

Замечания. Только ответ без объяснений – 0 балла; ответ с объяснениями (корень уравнения можно и не находить – достаточно заметить, что графики линейных функций с неравными угловыми коэффициентами пересекаются) – 7 баллов.

10.2. Каждая грань прямоугольного параллелепипеда 3×4×5 разделена на единичные квадратики. Можно ли вписать во все квадратики по числу так, чтобы сумма чисел в каждом клеточном кольце ширины 1, опоясывающем параллелепипед, была равна 120?

Ответ: да, можно.

Пример. Во все квадратики (двух) граней 3×4 запишем число 5, во все квадратики (двух) граней 3×5 запишем число 8, во все квадратики (двух) граней 4×5 запишем число 9.

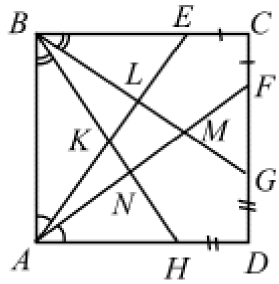
Проверка: сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 3 равна (4×5+5×8)×2=120, сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 4 равна (3×5+5×9)×2=120, сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 5 равна (3×8+4×9)×2=120.

Замечание. Приведенный пример – не единственный. Ответ без примера 0 баллов, ответ с правильным примером, но без проверки – 5 баллов. Составлена система уравнений (из которой следует правильный пример), но не решена, 3 балла.

10.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вид ax^2+bx+c. Тогда уравнения имеют вид $ax^2+(b-1)x+(c+1)=0$ и $ax^2+(b+2)x+(c-2)=0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному корню, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $(b-1)^2-4a(c+1)=0$ и $(b+2)^2-4a(c-2)=0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2-4ac=-2$. Значит, трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

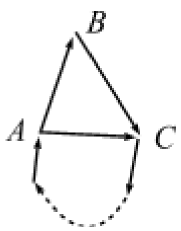
10.4. В квадрате *ABCD* на стороне *BC* взята точка *E*, на стороне *CD* – точки *F* и *G* (точка *F* между *C* и *G*), на стороне *AD* – точка *H*. При этом *CE* = *CF*, *DG* = *DH*. Докажите, что вокруг четырехугольника, образованного пересечением углов *HBG* и *EAF*, можно описать окружность.

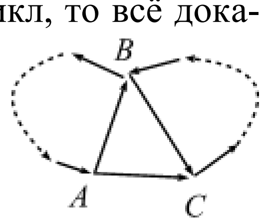


Обозначим вершины четырехугольника, образованного пересечением углов *HBG* и *EAF*, через *K*, *L*, *M*, *N* как показано на рисунке. Прямоугольные треугольники *ABE* и *ADF*, *BAH* и *BCG* попарно равны по двум катетам. Углы в первой паре треугольников при вершине *A* обозначим α; углы во второй паре при вершине *B* – β. Тогда угол при вершине *K* треугольника *AKB* равен $180^\circ-(\alpha+\beta)$. Он же является углом при вершине *K* четырехугольника *KLMN*. Угол *M* треугольника *FMG* равен $180^\circ-(90^\circ-\alpha)-(90^\circ-\beta)=\alpha+\beta$ и является углом при вершине *M* четырехугольника *KLMN*. Таким образом сумма противоположных углов четырехугольника *KLMN* равна 180 градусов и вокруг четырехугольника можно описать окружность.

10.5. В государстве некоторые города связаны дорогами, причём какие-то три города связаны дорогами каждый с каждым. На всех дорогах ввели одностороннее движение, но так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что в этом государстве найдётся замкнутый маршрут, состоящий из нечётного числа дорог.

Рассмотрим три дороги, связывающие три города, о которых говорится в условии. Если после их ориентации образовался цикл, то всё доказано. Если же это не так, то из какого-то города *A* выходят дороги в два других (*B* и *C*). Между *B* и *C* тоже есть дорога, которая после ориентации стала, например, *B*→*C*. Таким образом, из *A* в *C* есть два пути: длины 1 (*A*→*C*) и длины 2 (*A*→*B*→*C*). По условию, из *C* в *A* есть путь. Случай 1 (рисунок слева). Этот путь не проходит через *B*. Тогда этот





путь вместе с одним из двух указанных выше путей образуют цикл как чётной, так и нечётной длины. Случай 2 (рисунок справа). Этот путь проходит через B. Если участок пути от C до B (или от B до A) четный, то вместе с $B \to C$ (соотв. с $A \to B$) получим нечетный цикл. Если оба участка нечетные, то в целом путь четный. Добавим к нему $A \to C$ и получим нечетный цикл.

Замечание. Пропущен один из случаев – оценка не выше 3 баллов.