1. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна $2014 \cdot 2015$?
Решение. $2014 \cdot 2015$ дает при делении на 3 остаток 2.
Число при делении на 3 дает такой же остаток, что и сумма его цифр. Но квадрат натурального числа не может при делении на 3 остаток 2:
$(3k)^2$ делится на 3;
$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ при делении на 3 дает остаток 1;
$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ при делении на 3 дает остаток 1.
Значит, такого натурального числа не существует.
Рекомендации по проверке.
Ответ без доказательства – 0 баллов.

2. Сравните числа $\sin^{2014}111$ и $\cos^{2013}111$.

Ответ: $\sin^{2014}111 > \cos^{2013}111$.

Решение:

Заметим, что $\sin^{2014}111>0$. Так как выполняются следующие неравенства $3{,}14<\pi<3{,}15$, $35® < 35\cdot 3{,}15 = 110{,}25$, $35{,}5\cdot 3{,}14 = 111{,}47 < 35{,}5®$, то $35® < 111 < 35{,}5®$, а значит $\cos 111 < 0 \Rightarrow \cos^{2013}111 < 0$.

3. Найдите такое целое число n, что для любого целого $k\neq 2013$, число $n-k^{2014}$ кратно $2013-k$.

Ответ: 2013^{2014}.

Решение.

Обозначим через $t=2013-k$, тогда

$\dfrac{n-k^{2014}}{2013-k} = \dfrac{n-(2013-t)^{2014}}{t}$. Если возвести в степень 2014 число $2013-t$, то получим сумму слагаемых, каждое из которых содержит множитель t^m (для некоторого m=1,…,2014) за исключением 2013^{2014}, тогда получим

$\dfrac{n-(2013-t)^{2014}}{t} = \dfrac{n-2013^{2014}-tS}{t} = \dfrac{n-2013^{2014}}{t} - S$, где S– целое число, значит $n-2013^{2014} \vdots t$ для любого целого t. Это возможно лишь тогда, когда $n-2013^{2014}=0 \Rightarrow n = 2013^{2014}$.

Рекомендации по проверке.

1) Доказано, что число $n = 2013^{2014}$ удовлетворяет условию задачи, но не доказано, что других чисел, удовлетворяющих условию нет– 2 балла.

4. Целые числа $a>0$, b и c таковы, что квадратный трехчлен $f(x) = ax^2+bx+c$ имеет два корня большие 1. Докажите, что квадратный трехчлен $g(x) = 3ax^2-(c+2013)x+b+2015$ будет иметь два различных корня.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 нули функции $f(x)$, тогда по теореме Виета имеем:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$, а так как $x_1>1$, $x_2>1$ и $a>0$, то $\begin{cases} -b > 2a \\ c > a \end{cases}$. Получаем, что $b < 0 < a < c$. Заметим, что так как $x_1>1$, $x_2>1$, то $f(1) = a+b+c > 0 \Leftrightarrow$
$a+c > -b \Leftrightarrow (a+c)^2 > b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 > b^2 \Leftrightarrow$
$a^2 - 2ac + c^2 > b^2 - 4ac > 0$, а так как a, b и c целые, то получаем, что $c - a \geq 2$, то есть $a - c + 2 \leq 0$.
Найдем $g(1) = 3a - c - 2013 + b + 2015 = 3a - c + 2 + b = (a - c + 2) +$
$+ (2a + b) < 0$, а так как $a > 0$, то это означает, что квадратный трехчлен $g(x)$ имеет два корня.

Рекомендации по проверке.
1) Доказано, что $b < 0 < a < c$ – 1балл.
2) Дополнительно к (1) доказано, что $a - c + 2 \leq 0$, но решение не доведено до конца – 4 балла.

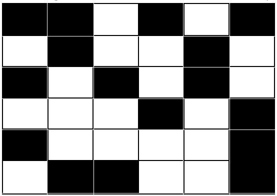
5. Какое наибольшее число клеток можно закрасить на доске 6×6 так, чтобы нельзя было выбрать четыре закрашенные клетки таким образом, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольник, стороны которого параллельны сторонам доски.

Решение.
Пусть можно закрасить n клеток. Обозначим через x_1, x_2,… x_6 количество закрашенных клеток в 1,2,…6 столбцах соответственно, тогда $x_1+ x_2+\ldots+ x_6=n$.
Подсчитаем количество пар клеток в столбцах, которые могут образовывать стороны искомого прямоугольника. В первом столбце их $\dfrac{x_1(x_1-1)}{2}$, аналогично в остальных $\dfrac{x_2(x_2-1)}{2}, \ldots, \dfrac{x_6(x_6-1)}{2}$. Тогда всего таких пар

$$\frac{x_1(x_1-1)}{2} + \ldots + \frac{x_6(x_6-1)}{2} = \frac{x_1^2 + \ldots + x_6^2}{2} - \frac{x_1 + \ldots + x_6}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{(x_1 + \ldots + x_6)^2}{6} - \frac{n}{2} =$$

$$= \frac{n^2}{12} - \frac{n}{2} = \frac{n^2 - 6n}{12}$$. Каждой такой паре соответствует пара строк, в которых они лежат, а всего таких пар $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!4!} = 15$. Тогда если $\dfrac{n^2 - 6n}{12} > 15$, то двум различным парам закрашенных клеток в разных столбцах будет

соответствовать одна и та же пара строк и найденные четыре клетки будут образовывать искомый прямоугольник. Значит $\dfrac{n^2-6n}{12}<15$, решая неравенство получаем, что $n \le 16$. Для n=16 можно раскрасить следующим образом:



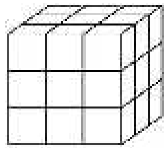
Рекомендации по проверке.

1) Доказано, только что $n \le 16$ – 4балл.

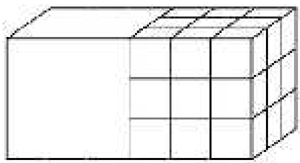
2) Приведен только пример для $n = 16$ – 3 балла.

6. Можно ли разбить пространство на кубики с целочисленными ребрами, так чтобы среди всех их ребер не нашлось более 324 одинаковых? Ответ обосновать.

Решение.



Шаг 1: Построим составной куб из 27 кубиков с ребрами равными 1.
Шаг 2: Данный составной куб с ребром равным 3 обложим вокруг 26 кубами такого же размера, образуя составной куб со стороной 3^2=9.
Продолжим процесс.
Шаг n: Получим составной куб со стороной 3^n.



Если ввести декартову систему координат, то вершины будут иметь координаты ($\pm 3^n/2$; $\pm 3^n/2$; $\pm 3^n/2$). Для каждой точки пространства найдется n, для которого точка будет находиться внутри куба. Следовательно, пространство разложиться на кубы, при этом на первом шаге ребер у 27 кубиков будет 27×12=324. При n=2 добавляются 26 кубиков с ребрами длины 3, т.е. 26×12=312< 324. На шаге n, образуется 312 новых ребер длины 3^{n-1}.

Рекомендации по проверке.

1) Описана процедура построения правильной конструкции, но не доказано заполнение всего пространства– 6 баллов.