11 класс

11.1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\sin x\cdot\left(x(x-1)(x-2)+(100-x)(99-x)(98-x)\right)}$.

<u>Ответ</u>: $2\pi k\le x\le 2\pi k+\pi$, k – целое. **<u>Указание</u>**. Выражение в скобках под корнем положительно при всех x (см. решение задачи 9.1). Осталось записать решение неравенства $\sin x\ge 0$.

11.2. В пространстве с прямоугольной системой координат дан прямоугольный параллелепипед. Известно, что все его вершины имеют целочисленные координаты, причем разные вершины лежат внутри разных октантов. Ребра параллелепипеда параллельны координатным осям. Найдите диагональ параллелепипеда, если его объем равен 2014. (Октант – это часть пространства, ограниченная тремя координатными плоскостями.)

<u>Ответ</u>: $\sqrt{2^2+19^2+53^2}$. **<u>Указание</u>**. Пусть a, b, c – стороны параллелепипеда. Имеем abc = 2014. Заметим, что числа a, b, c – натуральные, как следует из условий задачи (вершины с целочисленными координатами, а ребра параллельны координатным осям). Заметим также, что ни одно из чисел a, b, c не может равняться единице, т.к. вершины лежат *внутри* разных октантов. Поэтому разложив 2014 на простые множители 2014 = 2·19·53, получим, что a, b, c – это (с точностью до порядка) числа 2, 19, 53. Поэтому диагональ равна $\sqrt{2^2+19^2+53^2}$.

11.3. Дан треугольник ABC. Точка P – центр вписанной окружности. Найдите угол B, если известно, что $R_{ABC}=R_{APC}$, где R_{ABC}, R_{APC} – радиусы описанных окружностей треугольников ABC и APC соответственно.

<u>Ответ</u>: 60°. **<u>Указание</u>**. См. задачу 10.4.

11.4. а) Докажите неравенство $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}<\sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел n; **б)** существует ли такое натуральное n, для которого $[\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}]<[\sqrt{9n+3}]$, где $[a]$ означает целую часть числа a?

<u>Ответ</u>: **б)** не существует. **<u>Указание</u>**. См. задачу 10.5.

11.5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\cos x(\cos x+1)(\cos x+2)(\cos x+3)$.

<u>Ответ</u>: наименьшее значение равно –1, наибольшее значение равно 24. **<u>Указание</u>**. Обозначим $u=\cos x$, $u\in[-1;1]$. Тогда $y=f(u)=u(u+1)(u+2)(u+3)$ = $\left(u(u+3)\right)\left((u+1)(u+2)\right)$ = $(u^2+3u)(u^2+3u+2)$. Пусть $t=u^2+3u$. Заметим, что у квадратичной функции $t(u)$ координата вершины $u_0=-3/2$ и поэтому $t(u)$ монотонно возрастает на промежутке [–1;1], принимая значения от –2 до 4. Далее, функция $y(t)=t(t+2)$ = $(t+1)^2-1$ принимает наименьшее значение равное –1 при t = –1, а на концах отрезка $[-2;4]$ принимает значения 0 и 24 соответственно, откуда следует результат.