11 класс

№1. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Решение: Чтобы решить задачу, проведем мысленный эксперимент: представим себе, что том 1 и 2 связаны бечевкой. Расстановка полученного набора из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена 9! способами.

Ответ: 9!

7 баллов – задание выполнено верно.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ 8x^3 - 2x^2 - 6x = 2y^2 + \sqrt{3} - 2. \end{cases}$

Решение:

Поскольку $x^2 + y^2 = 1$, на отрезке $[0; 2\pi]$ найдется число α такое, что $x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \\ 8\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - 6\cos\alpha = 2\sin^2\alpha + \sqrt{3} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = \sqrt{3} + 2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2 \Leftrightarrow$$

$$2\cos 3\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pm\frac{\pi}{18} + 2\pi\ ; \\ \alpha = \pm\frac{13\pi}{18} + 2\pi\ ; \\ \alpha = \pm\frac{25\pi}{18} + 2\pi\ , \quad k\ . \end{array}\right.$$

Учитывая, что $\alpha \in [0; 2\pi]$, получим решения (x; y) исходной системы:

$$\left(\cos\frac{\pi}{18}; \sin\frac{\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{\pi}{18}; -\sin\frac{\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{13\pi}{18}; \sin\frac{13\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{13\pi}{18}; -\sin\frac{13\pi}{18}\right);$$
$$\left(\cos\frac{25\pi}{18}; -\sin\frac{25\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{25\pi}{18}; \sin\frac{25\pi}{18}\right).$$

Ответ:

$$\left(\cos\frac{\pi}{18}; \sin\frac{\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{\pi}{18}; -\sin\frac{\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{13\pi}{18}; \sin\frac{13\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{13\pi}{18}; -\sin\frac{13\pi}{18}\right);$$
$$\left(\cos\frac{25\pi}{18}; -\sin\frac{25\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{25\pi}{18}; \sin\frac{25\pi}{18}\right).$$

7 баллов – задание выполнено верно.

3 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

1 балл - верно решено одно из уравнений системы.

№3. Среди всех решений системы $\begin{cases} 3y + 2x \geq 2, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y \leq 4 \end{cases}$ найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$ принимает минимальное значение.

Решение: Перепишем систему в следующем виде:
$\begin{cases} y \geq \frac{2-2x}{3} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 3^2 \end{cases}$

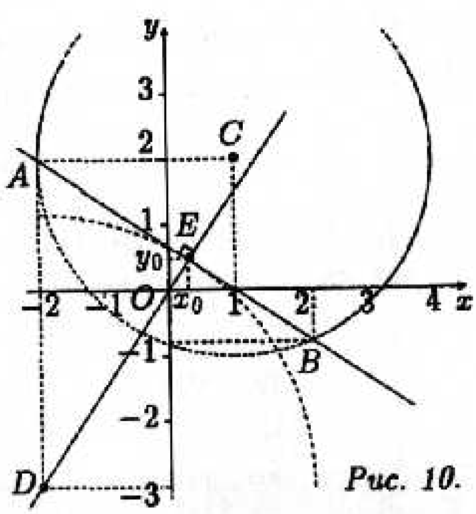


Рис. 10.

Множество *M* точек координатной плоскости *Oxy*, абсцисса и ордината которых являются решением данной системы, - это часть круга радиуса 3 с центром в точке (1;2), лежащая над прямой *AB*, имеющей уравнение $y = \frac{2-2x}{3}$, вместе с хордой *AB* (рис.10).

Значение функции

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = (x+2)^2 + (y+3)^2$$

равно квадрату расстояния между точками (x, y) и (-2;-3). Поэтому на множестве решений системы функция $f(x,y)$ принимает минимальное значение в точке множества *M*, ближайшей к точке *D*(-2;-3). Будем искать решение задачи среди точек прямой *AB*. это означает, что переменные *x* и *y* в выражении $f(x,y)$ должны быть связаны равенством $y = \frac{2-2x}{3}$.

Таким образом, получаем функцию одной переменной

$$u(x) = (x+2)^2 + (\frac{2-2x}{3} + 3)^2 = \frac{1}{9}(13x^2 - 8x + 157).$$

Квадратный трехчлен в правой части последнего равенства имеет минимум в точке $x = \frac{4}{1}$. Воспользовавшись уравнением прямой AB, найдем соответствующее значение $y = \frac{6}{1}$.

Осталось выяснить, действительно ли полученная точка $\left(\frac{4}{1}; \frac{6}{1}\right)$ дает решение задачи. Для этого достаточно убедиться, что она принадлежит множеству *M*. Это так, потому что $(\frac{4}{1} - 1)^2 + (\frac{6}{1} - 2)^2 = \frac{8}{1} + \frac{4}{1} = \frac{4}{1} < 9$

Ответ: $\left(\frac{4}{1}; \frac{6}{1}\right)$

7 баллов – задание выполнено верно.

3 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

№4. Перед каждым из чисел 11, 12, …,19 и 2, 3, …,6 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение:

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго – с минусами, то сумма максимальна и равна 5(11+…+19)-9(-2-…-6)=5($\frac{1\ \ +1}{2}$ · 9)+9($\frac{2+6}{2}$ · 5) = 45·19 = 855.

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

5(-11-12+13-14+15-16+17-18+19)-9(-2+3-4+5-6) = -5·7+9· 4 = -35+36 = 1.

Ответ: 855 и 1.

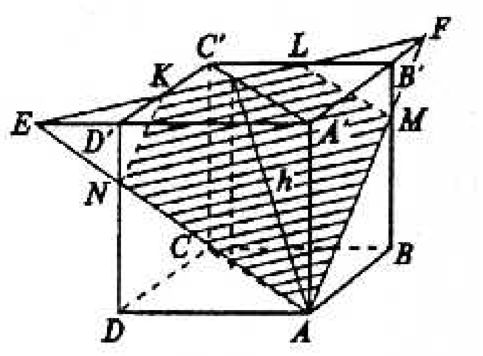
7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)

3 балла – верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0

1 балл – верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0.

№5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC' и $D\ D'$ – боковые ребра. Найдите площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер $B'C'$ и $C'D'$.Ребро куба имеет длину, равную 1.



Решение: Сначала построим сечение. Начнем с точек K и L, являющихся серединами ребер $B'C'$ и $C'D'$ (см. рис.). Эти точки лежат в плоскости верхней грани куба, поэтому прямая (KL), проходящая через эти точки, есть линия пересечения секущей плоскости с указанной гранью куба, а отрезок KL – одна из сторон многоугольника, представляющего сечение.

Продолжив KL до ее пересечения с продолжением ребер куба $A'D'$ и $A'B'$, получим точки E и F, лежащие соответственно в гранях $ADD'A'$ и $AA'B'B$ куба. Тогда в каждой из этих граней будут известны уже по две точки, принадлежащие сечению. Это A и E в плоскости грани $ADD'A'$ и A и F в плоскости грани $AA'B'B$. Поэтому прямые

AE и *AF* принадлежат сечению, а отрезки *AN* и *AM* этих прямых – стороны многоугольника, представляющего сечение.

Соединив точки *N* и *K* в плоскости грани $CC'D'D$ и точки *L* и *M* в плоскости грани $BB'C'C$, получим весть пятиугольник *AMLKN*, представляющий сечение куба рассматриваемой плоскостью.

Заметим, что пятиугольник *AMLKN* получается из треугольника *AEF* отсечением от него двух равных треугольников *MLF* и *NKE*. Это дает возможность определить площадь сечения по формуле $S_A \quad = S_A \quad - 2S_N \quad$.

Площадь равнобедренного треугольника A найти нетрудно. Для этого заметим, что из подобия треугольников *B’LF*,*C’KL* и *D’KE* с коэффициентом подобия 1(то есть фактически, из равенства этих треугольников) следует *A’E* = 3/2, *A’F*=3/2.

Откуда EF = $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, *AE*=*AF*=$\frac{\sqrt{1}}{2}$ поэтому длина *h* высоты ΔA , опущенной из вершины *A* на сторону E равна $\sqrt{A \quad ^2 - \frac{1}{4} \cdot E \quad ^2}$=$\frac{\sqrt{3}}{4}$, а площадь $S_A \quad = \frac{3\sqrt{1}}{8}$.

Поскольку ΔN можно получить из ΔA изменением длины его стороны *EF* в *EK*/ *EF* = 1/3 раза, а длины стороны *EA* – в *EN*/*EA* раз, то $S_N \quad = \frac{1}{3} \cdot \frac{E}{E} \cdot S_A \quad = \frac{\sqrt{1}}{8} \cdot \frac{E}{E}$.

Осталось найти отношение $\frac{E}{E}$. Из подобия $\Delta E \quad 'N\, u\, \Delta A$ с коэффициентом подобия $\frac{ED'}{A}$=$\frac{1}{2}$ заключаем: $\frac{E}{AN}$=$\frac{1}{2}$, откуда находим интересующее нас отношение $\frac{E}{E}$=$\frac{1}{3}$. Итак, $S_N \quad = \frac{\sqrt{1}}{2}$. Окончательно имеем: $S_A \quad = \frac{3\sqrt{1}}{8} - 2\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{7\sqrt{1}}{2}$.

Заметим, что к этому же результату можно было прийти другим способом, а именно: найти площадь проекции пятиугольника $A \quad LK$ на плоскость основания куба (она равна 7/8), а затем разделить эту площадь на косинус угла проектирования, то есть на косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания куба. Имеем: $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{1}}$. Тогда искомая площадь равна $\frac{7\sqrt{1}}{2}$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{1}}{2}$.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное, но не конца обоснованно.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).