9.1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок заплакал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая – у Пятачка?

Ответ: Винни-Пух и Пятачок первоначально имели 6/7 и 1/7 доли торта соответственно.

Обозначим a и b доли торта Винни-Пуха и Пятачка, соответственно. Тогда $a + b = 1$. Из условия $a/3 + b = 3b$, значит, $a = 6b$, $7b = 1$, $b = 1/7$ и $a = 6/7$.

9.2. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство $\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{d}\geq\frac{(a+c)^2}{b+d}$.

Поскольку числа a, b, c, d положительные, данное неравенство равносильно неравенству $(b+d)(da^2+bc^2)\geq db(a+c)^2$. После преобразований приходим к неравенству $(bc-da)^2\geq 0$, которое является верным.

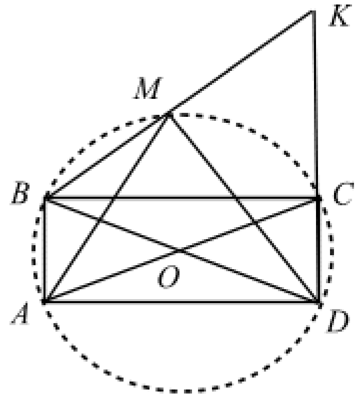
9.3. Найдите какие-нибудь пять последовательных натуральных чисел, меньших 100, произведение которых делится на 2014.

Ответ. 53, 54, 55, 56, 57.

Этот пример можно получить, заметив, что $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$.

Замечание. Пример таких чисел – единственный. Только ответ без проверки и без объяснений – 5 балла; ответ с проверкой или с объяснениями – 7 баллов.

9.4. Дан прямоугольник *ABCD*. На луче *DC* отложен отрезок *DK*, равный *DB*. *M* – середина отрезка *BK*. Докажите что *AM* – биссектриса угла *BAC*.



Первое решение. Треугольник *BDK* равнобедренный по построению, значит, его медиана *DM* является его высотой и биссектрисой. Рассмотрим окружность, построенную на *BD*, как на диаметре. Точки *M*, *C* и *A* лежат на этой окружности, поскольку углы *BMD*, *BCD* и *BAD* – прямые. Углы *BAM* и *BDM*, равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Точно также равны углы *MAC* и *MDC*. Далее, углы *BDM* и *MDC* равны, поскольку *DM* является биссектрисой. Отсюда следует, что углы *BDM* и *MDC* равны, а *AM* – биссектриса угла *BAC*.

Второе решение. Как в первом решении замечаем, что *DM* является биссектрисой угла *BDC*. Это означает, что точка *M* равноудалена от сторон этого угла. Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, значит отрезок *OM* – средняя линия в треугольнике *DBK*. Значит, *MO* параллелен *DK* и перпендикулярен *BC*. Отсюда следует, что *MO* серединный перпендикуляр к *BC*, точка *M* равноудалена от сторон угла *BOC* и равноудалена от прямых *AB* и *CD*. Таким образом, *M* равноудалена от *AB* и *AC*, значит, лежит на биссектрисе угла *BAC*.

9.5. В уравнении $*x^2+*x+*=0$ двое по очереди вместо любой звёздочки ставят произвольное число (при x^2 нуль ставить нельзя). Первый выигрывает, если полученное уравнение не имеет корней, а второй – в противном случае. Может ли кто-нибудь из них выиграть, независимо от игры партнёра?

Ответ: второй игрок выигрывает независимо от игры первого игрока.

Если первый игрок не поставит число *c*, отличное от нуля, на место свободного члена, то второй игрок на это место поставит число 0, и не зависимо от дальнейшей игры, итоговое уравнение будет иметь корень $x = 0$. Пусть своим ходом первый игрок поставил число *c*, отличное от нуля, на место свободного члена. Тогда перед x^2 второй игрок поставит число $-c$. Рассмотрим дискриминант $D=b^2-4ac=b^2+4c^2>0$ не зависимо от последнего хода первого игрока.