Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2014 г.)

9 класс

1. Последовательность целых чисел задаётся рекуррентно: $a_0=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_n+(a_{n+1})^2$. Чему равен остаток от деления a_{2014} на 7?

Решение. Сначала найдём a_1 из уравнения: $2 = 1+ (a_1)^2$, откуда $a_1=1$ или $a_1=-1$. Для каждого варианта далее будем вместо самих a_n вычислять остатки от деления a_n на 7.

При $a_1=1$ получим последовательность:

1, 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1, 1, ...

Поскольку десятый и одиннадцатый члены равны единице и каждый член последовательности однозначно определяется двумя предыдущими, то далее последовательность зациклится циклом (1,1,2,5,6,6,0,6,1,0). Период цикла равен 10. Значит, a_{2014} будет давать такой же остаток при делении на 7, как и a_4, а именно 5.

При $a_1=-1$ последовательность остатков будет такой же, если бы a_1 равнялось 6:

1, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 6,

Здесь длина периода равна 6, и т.к. 2014 даёт остаток 3 при делении на 6, то $a_{2014}=a_3=2$.

Ответ: 5 или 2.

2. Ордината вершины параболы $y = x^2+bx+c$ равна -7. Сколько целых чисел может находиться между корнями уравнения $x^2+bx+c = 0$?

Решение. Рассмотрим параболу $y = x^2 - 7$. Точки пересечения её с осью *Ox* имеют абсциссы $\pm\sqrt{7}$, следовательно, расстояние между ними равно $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$. При сдвиге параболы вдоль оси *Ox*, расстояние между корнями не поменяется, и т.к. $\sqrt{28} < \sqrt{25} = 5$, между корнями будут попадать 5 или 6 целых чисел.

Ответ: 5 или 6.

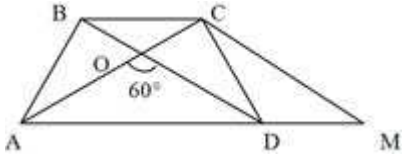
3. Решить неравенство $\sqrt{2x^2-8x+6}+\sqrt{4x-x^2-3}<x-1$

Решение. Заметим, что все решения исходного неравенства существуют, если подкоренные выражения неотрицательны. Одновременно эти неравенства выполняются лишь при условии $x^2 - 4x + 3 = 0$. Это уравнение имеет два корня 1 и 3. Проверка показывает, что исходное неравенство имеет единственное решение 3.

Ответ: 3.

4. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.

Доказательство. Пусть $AD = a$, $BC = b$, $AC = a + b$. Продолжим *AD* за точку *D* на расстояние $DM = BC$ (см. рисунок). Тогда очевидно, что ΔACM - равносторонний. Но это значит, что ΔAOD и ΔBOC - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что $\Delta AOB = \Delta COD$, откуда имеем, что $AB = CD$.



5. На столе лежат 2014 спичек. Каждому из двух игроков разрешается по очереди брать не более 7 спичек, но не менее одной. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю.

Кто выигрывает при правильной стратегии - начинающий игру или второй игрок? Какова выигрышная стратегия?

Решение. Начинающий первым ходом берет шесть спичек, а затем каждый раз дополняет число спичек, взятых соперником, до восьми.

Ответ: при правильной игре выигрывает начинающий.