Всероссийская олимпиада школьников 2014 г
Муниципальный этап
Математика
Критерии
9 класс

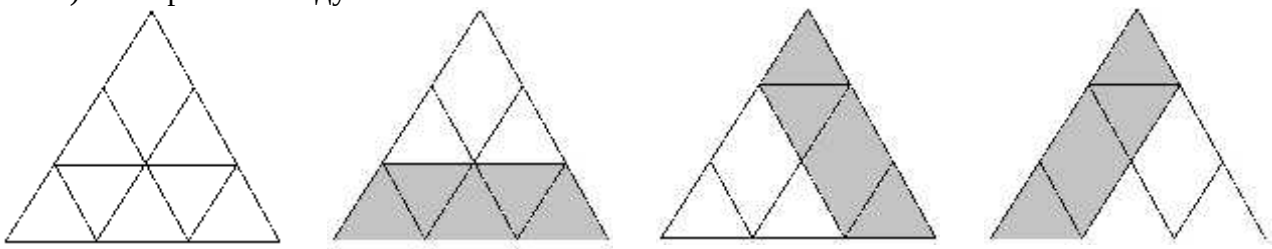
Общее время выполнения работы – 3 часа 55 мин (235 мин).

Общие критерии оценки:

7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1

Треугольник разделен на 9 равных треугольников. Можно ли расставить девять чисел, являющихся различными степенями двойки так, чтобы суммы чисел в каждой полосе из пяти треугольников, расположенных вдоль сторон исходного треугольника (как на рисунках ниже) были равны между собой?



Количество баллов 7

Ответ: нет

Решение

По формуле для суммы геометрической прогрессии имеем

$1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1<2^{n+1}$

Рассмотрим самую большую степень среди заданных чисел. Поскольку каждый треугольник принадлежит самое большее двум полосам, расположенным вдоль сторон исходного треугольника, то одна из полос не содержит эту степень.

Из указанного неравенства следует, что сумма чисел в полосе не содержащей наибольшей степени двойки не может быть равна сумме чисел, находящихся в полосе содержащей наибольшую степень двойки.

Таким образом, получаем ответ – нельзя.

Задание 2

Стороны BC, CA, AB треугольника ABC касаются вписанной в него окружности в точках D, E, F. Докажите, что треугольник DEF остроугольный.

Количество баллов 7

Решение

Будем обозначать через A, B, C углы треугольника ABC.

Треугольник DFB равнобедренный, поскольку отрезки BD и BF равны как отрезки касательных, проведенных к вписанной окружности из точки B.
Поскольку сумма углов треугольника DFB равна 180^0, можно вычислить
$\angle BDF = \angle BFD = (180^0 - \angle B)/2 = 90^0 - \angle B/2$.
Аналогичным образом, находим, что $\angle CDE = 90^0 - \angle C/2$.
Отсюда получаем, что угол FDE треугольника FDE равен
$180^0 - (90^0 - \angle B/2) - (90^0 - \angle C/2) = (\angle B + \angle C)/2$
Величина этого выражения меньше, чем 90^0. Таким образом, мы показали, что угол FDE - острый. Аналогичным образом, можно показать, что и остальные углы треугольника FDE - острые.

Задание 3
Дано число 100...027, количество нулей в нем равно 2014. Докажите, что это число составное.
Количество баллов 7
Решение
Данное число можно записать в виде $10^{2016}+27$.
Воспользовавшись формулой суммы кубов, получим:
$10^{2016} + 27 = (10^{672})^3 + 3^3 = (10^{672}+3)(10^{1344} - 3.10^{672} + 9)$.

Задание 4
В каждой клетке доски 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?
Количество баллов 7
Ответ: да
Решение
Так как общее число клеток шахматной доски 5×5 клеток нечетно, то черных и белых клеток не может быть поровну. Пусть для определенности черных клеток больше. Тогда жуков, сидящих на белых клетках, меньше, чем черных клеток. Поэтому хотя бы одна из черных клеток останется пустой, так как на черные клетки переползают только жуки, сидящие на белых клетках.

Задание 5
Найти все действительные решения уравнения с 4 неизвестными:
$1 + x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$.
Количество баллов 7
Ответ: (-0,5; 0; 0; 0).
Решение
Перенесем все слагаемые в левую часть и выделим полные квадраты.
$(½x + 1)^2 + (½ x - y)^2 + (½ x - z)^2 + (½ x - t)^2 = 0$.
Отсюда ясно, что все слагаемые равны нулю.
Получаем:
$½x + 1 = ½ x - y = ½ x - z = ½ x - t = 0$,
то есть $x = -½$, $y = z = t = 0$.