9 класс

9.1. Решите уравнение $x(x-1)(x-2)+(100-x)(99-x)(98-x)=0$.

Ответ: нет решений. **Указание**. Заметим, что данное уравнение – квадратное (коэффициенты при x^3 уничтожаются). У данного квадратного трехчлена вершина находится в точке с абсциссой $x_0=\frac{100}{2}=50$; в этом можно убедиться либо непосредственным подсчетом, либо следующим образом: если ввести замену $t = x – 50$, то квадратный трехчлен запишется в виде $f(t)=(50+t)(49+t)(48+t)+(50-t)(49-t)(48-t)$, и легко видеть, что коэффициенты при нечетных степенях t уничтожаются, а значение при $t = 0$ (ордината вершины) положительна, причем старший коэффициент (при t^2) также положителен. Значит, уравнение корней не имеет.

9.2. На доске записано несколько целых чисел. Коля заменил каждое число (стерев его) следующим образом: вместо четного числа он записал его половину, а вместо нечетного – удвоенное. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел и сумма исходных совпали, если сумма исходных чисел равнялась **а)** 2014; **б)** 2013?

Ответ: **а)** не могло; **б)** могло. **Указание**. Обозначим через A начальную сумму четных чисел на доске, B – сумму нечетных чисел. Тогда должно выполняться равенство $\frac{A}{2}+2B=A+B \Leftrightarrow A=2B$. Значит, сумма на доске должна быть равна $A + B = 3B=n$. В случае **а)** при $n = 2014$ это приводит к противоречию с делимостью на 3. В случае **б)** при $n = 2013$ легко проверить такой пример: на доске записаны два числа $a = 1342$ и $b = 671 = a/2$.

9.3. Дан четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в одной и той же точке.

Указание. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = e$ и пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается AC в точке M. Тогда из свойства касательных получим, что $AM=\frac{a+e-b}{2}$. Аналогично, для окружности, вписанной в треугольник ACD и касающейся AC в точке N, получим: $AN=\frac{d+e-c}{2}$. Равенство $AM = AN$ равносильно равенству $a – b = d – c \Leftrightarrow a + c = b + d$, а последнее равенство – это известное условие для четырехугольника, в который можно вписать окружность.

9.4. Два корабля идут по морю перпендикулярными курсами так, что оба должны пройти через фиксированную точку O (каждый – в свой момент времени. После прохождения точки O корабли, не останавливаясь, продолжат своё прямолинейное движение). Скорости кораблей одинаковы и постоянны. В полдень корабли еще не прошли точку O и находились от нее в 20 км и 15 км соответственно. Будут ли корабли далее в какой-то момент в зоне видимости друг друга, если видимость в этот день 4 км?

Ответ: да, будут. **Указание**. Пусть $a = 20$, $b = 15$, v – скорость кораблей. Тогда расстояние между ними через время t после полудня равно (по теореме Пифагора) $\sqrt{(a-vt)^2+(b-vt)^2}$. Квадратный трехчлен $f(t)=(a-vt)^2+(b-vt)^2$ с положительным старшим коэффициентом $2v^2$ принимает наименьшее значение в вершине $t_0=\frac{(a+b)v}{2v^2}=\frac{a+b}{2v}$. При этом значении $|a-vt_0|=|b-vt_0|=\frac{|a-b|}{2}$ и поэтому расстояние в момент t_0 равно $\frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}<4$ (легко видеть, что к моменту t_0 один из кораблей уже прошел точку O, а другой еще нет).

9.5. У Пети есть 4 медных советских монеты – по одной номиналом 1, 2, 3 и 5 копеек. Он узнал такой факт: эти монеты должны весить ровно столько граммов, каков их номинал. Петя хочет проверить этот факт с помощью чашечных весов. Сможет ли он это сделать, если у него есть всего одна гирька в 9 граммов?

Ответ: да, сможет. **Указание**. См. задачу 8.5.