10.1. На доске записаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 17?

Ответ: да может.

Искомая последовательность операций видна из следующей записи: 17 = 32 – (16 – (8 – 4 – 2 – 1)).

Замечание. Только ответ без указания последовательности действий – 0 баллов.

10.2. Найдите все такие квадратные трёхчлены $f(x)$, для которых справедливо равенство: $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7$.

Ответ: $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

Первое решение. Пусть $t = 2x + 1$, тогда $x = ½(t – 1)$. Следовательно, $f(t) = (t – 1)^2 + 7(t – 1) + 7 = t^2 + 5t + 1$.

Второе: $4x^2+14x+7=\left(4x^2+4x+1\right)+10x+5+1=\left(2x+1\right)^2+5\left(2x+1\right)+1$.

Третье: трёхчлены равны, если равны их соответствующие коэффициенты. Обозначим $f(x)=ax^2+bx+c$, из условия получим соотношение $a\left(2x+1\right)^2+b\left(2x+1\right)+c=4x^2+14x+7$ из которого вытекает ответ.

Замечание. Если в работе приведен ответ, произведена проверка ответа, но не замечена его единственность, не более 2 баллов.

10.3. Какое максимальное количество цифр может иметь натуральное число, у которого все цифры различные, при этом оно делится на каждую из своих цифр?

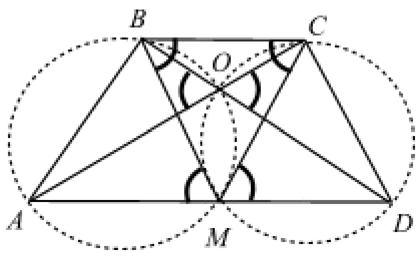
Ответ: 7 цифр.

Оценка. Всего цифр 10. Число не может содержать цифру 0, значит их не более 9. Если все 9, то цифра 5 должна стоять в конце числа (признак делимости на 5), но при этом число должно делиться и на 2. Значит, цифры 5 в этом числе нет. Если в числе отсутствуют только 0 и 5, то присутствует 9, а сумма цифр этого числа будет 40, что противоречит делимости на 9. Таким образом, цифр не более семи.

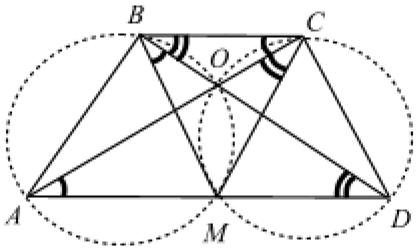
Примером такого числа является число 9176328. Проверка. Трёхзначное число, составленное из трёх последних цифр – число 328 делится на 8, значит, данное число делится на свои цифры 2 и 8. Сумма цифр этого числа 36, значит оно делится на 3 и 9, кроме того на 6. Легко видеть, что оно делится на 7: 9176328:7=1310904.

Замечания. Приведён пример семизначного числа с проверкой – 3 балла. Доказано, что цифр не более семи, но примера такого числа не приведено – 3 балла. Есть и то и другое 7 баллов.

10.4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.



Первое решение. Углы AOB и COD равны, как вертикальные, углы AOB и AMB, COD и CMD равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, углы AMB и MBC, CMD и MCB равны как накрест лежащие.



Второе решение. По теореме об углах, вписанных в окружность, $\angle OBM = \angle OAM$. По определению трапеции $\angle OAM = \angle OCB$. Таким образом, $\angle OBM = \angle OCB$. Аналогично доказывается, что $\angle OCM = \angle OBC$. Складывая полученные равенства, найдём, что $\angle MBC = \angle MCB$, то есть, $BM = CM$.

10.5. В олимпиаде, состоящей из 6 задач, участвуют 200 школьников. Известно, что каждую задачу решили хотя бы 120 школьников. Докажите, что можно выбрать двух школьников таким образом, чтобы каждую задачу решил кто-либо из этой пары.

Всего было написано не менее $120 \times 6 = 720$ решений задач. В среднем это составляет $720 : 200 = 3{,}6$ решений на одного школьника. Значит, найдётся школьник, решивший не менее четырёх задач. Пусть он не решил задачи A и B. По этим двум задачам имеется 240 решений. В среднем это составляет $240 : 200 = 1{,}2$ решений на одного школьника. Значит, найдётся школьник, решивший эти задачи.