10-й класс

10.1 О числах *x* и *y* известно, что $x^2+\frac{1}{y}=y^2+\frac{1}{x}$. Верно ли, что $x=y$?

Решение: Достаточно провести подходящий пример. Приведем некоторые наводящие соображения. Имеем:

$$x^2-y^2=\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\quad (x-y)(x+y)=-\frac{x-y}{xy}.$$

При $x\neq y$ это равносильно равенству

$$xy(x+y)=-1.$$

Это дает нам квадратное уравнение для *x*:

$$yx^2+y^2x+1=0$$

с дискриминантом $D=y^4-4y=y(y^3-4).$

Если значение *y* достаточно большое, то $D>0,$ и мы сможем найти *x*.

Пусть, например, $y=2$. Тогда $D=8$ и $x=\frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Это подходящий пример.

Ответ: не обязательно $x=y$.

10.2 Три ученика A, B и C участвовали в беге на 100 м. Когда A прибежал на финиш, B был позади него на 10 м. Также, когда B финишировал, C был позади него на 10 м. На сколько метров на финише A определил C?

Решение: Пусть t_1 – время A на всей стометровке, b – скорость B, t_2 – время B на всей стометровке, c – скорость C. По условию

$$bt_1=90,\quad t_2=\frac{100}{b},\quad ct_2=90.$$

За время t_1 ученик C пробежит расстояние

$$ct_1=c\cdot\frac{90}{b}=c\cdot 90\cdot\frac{t_2}{100}=\frac{9}{10}ct_2=\frac{9}{10}\cdot 90=81.$$

Ответ: на 19 м.

10.3 Учитель написал на доске три разных положительных числа. Петя записал в свою тетрадь три числа − их попарные суммы, а Коля в свою тетрадь записал три числа, обратных к числам, написанным на доске. Могли ли числа, записанные в тетрадях ребят, совпасть?

Решение: Пусть $0 < x < y < z$ – числа учителя. Тогда у Пети в тетради записаны числа $x + y < x + z < y + z$, а у Коли – числа $\frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. В случае совпадения Петиных и Колей троек чисел мы имели бы

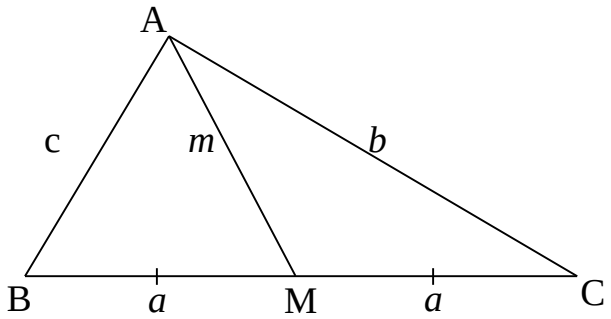
$$x + y = \frac{1}{z}, \quad x + z = \frac{1}{y}, \quad y + z = \frac{1}{x}, \text{ а, значит, } xz + yz = 1, \quad xy + zy = 1.$$

Отсюда $xz = xy$, следовательно, $z = y$. Это дает противоречие к предположению о совпадении.

Ответ: не могли.

10.4 В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник *ABM*, быть ровно в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник *ACM*?

Решение: См. рис.



AB=*c*,
BC=*2a*,
CA=*b*,
AM=*m*,
$S_{ABM} = S_{ACM} = S$

Воспользуемся известной формулой для радиуса r окружности, вписанной в треугольник со сторонами a,b, c:

$$r = \frac{2S}{a+b+c}, \quad \text{где S – площадь треугольника.}$$

Предположим, что $r_{ABM} = 2r_{ACM}$.

Имеем: $\frac{2S}{c+a+m} = 2 \cdot \frac{2S}{a+b+m}$.

Далее $a + b + m = 2(c + a + m)$,

откуда $m = b - a - 2c$.

Так как $b < 2a + c$ (неравенство треугольника), то $m < 2a + c - a - 2c = a - c$, поэтому $m + c < a$, в то время как $m + c > a$ (неравенство треугольника).

10.5 Последовательность чисел формируется по следующему правилу: первые три члена a_1, a_2, a_3 являются случайными целыми положительными числами. Четвертый член a_4 равен остатку от деления $a_2 \cdot a_3$ на a_1, пятый член a_5 равен остатку от деления $a_3 \cdot a_4$ на a_2 и т.д.. Докажите, что в этой последовательности должно появиться число 0.

Решение: Предположим, что при построении этой последовательности никогда не возникает число 0 и последовательность будет продолжаться неограниченно долго. Закон образования последовательно таков: a_{n+3} – это остаток от деления $a_{n+1}a_{n+2}$ на a_n, $n=1,2,...$ Следовательно, $a_{n+3}<a_n$. Таким образом, $a_1>a_4>a_7>...$

Но убывающая последовательность целых положительных чисел не может быть бесконечной.