10 класс

1. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{a+b}=(a+b)-2\cdot\dfrac{ab}{a+b}$ - целое число.

2. По условию $a^2<4b,\ c^2<4d$. Покажем, что $\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2<4\left(\dfrac{b+d}{2}\right)$.

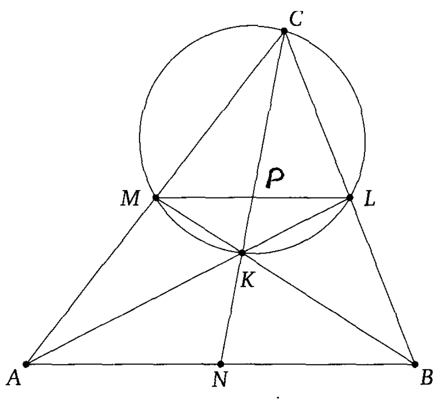
Имеем

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+2ac+c^2)\le\frac{1}{4}(a^2+(a^2+c^2)+c^2)=\frac{1}{2}(a^2+c^2)<\frac{1}{2}(4b+4d).$$

(В ходе доказательства использовали неравенство $2ac\le a^2+c^2 \Leftrightarrow (a-c)^2\ge 0$.)

3. Занумеруем кошельки слева направо. Сравним 3-й и 6-й кошельки. Равенство означает, что перекладывали из 1-го, 4-го или 7-го. Сравнив любые два, найдём самый легкий. Если 3-й тяжелее 6-го, то перекладывали либо из 2-го, либо из 6-го. Сравниваем их. Если 3-й легче 6-го, то перекладывали либо из 3-го, либо из 5-го. Сравниваем их.

4. Ответ. $\sqrt{3}$.



Так как ML – средняя линия треугольника ABC, получаем, что $ML \parallel AB$ и $ML = \frac{1}{2}AB = 1$. Если P – точка пересечения медианы CN и средней линии ML, то $CP = PN$ и $MP = PL = \frac{1}{2}$.

Пусть x - длина медианы CN, тогда

$$CP = \frac{1}{2}x,\ \ PK = PN - KN = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x.$$

Поскольку четырехугольник $CLKM$ вписанный, получаем, что $\angle MCK = \angle KLM$. Отсюда следует, что $\Delta MCP \sim \Delta KLP$ (по двум углам). Тогда $\frac{MP}{KP} = \frac{PC}{PL}$, то есть $MP \cdot PL = KP \cdot PC$.

Учитывая, что $MP \cdot PL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ и $KP \cdot PC = \frac{1}{6}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{12}x^2$, получим $\frac{1}{12}x^2 = \frac{1}{4}$, откуда $x = \sqrt{3}$ (с учетом $x > 0$).

5. Ответ. (0, 0, 0) и (2, 2, 2).

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим

$$x - z = z^2 - x^2, \text{ то есть } x - z = (z - x)(z + x).$$

Учитывая, что $z + x = y^2$, приходим к уравнению $x - z = (z - x)y^2$.

Вычитая из второго уравнения третье, аналогичными рассуждениями получим уравнение $y - x = (x - y)z^2$.

Таким образом, приходим к следствию исходной системы

$$\begin{cases} x - z = (z - x)y^2, \\ y - x = (x - y)z^2. \end{cases}$$

Преобразуем последнюю систему к виду:

$$\begin{cases} (x - z)(1 + y^2) = 0, \\ (y - x)(1 + z^2) = 0. \end{cases}$$

Тем самым доказано, что если исходная система имеет решение, то $x = y = z$ и $2x = x^2$.

Следовательно, данная система может иметь лишь два решения: $x = y = z = 0$ и $x = y = z = 2$. Других решений нет.

Проверкой убеждаемся, что (0, 0, 0) и (2, 2, 2) – решения данной системы.