Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015 – 2016 учебном году
10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *Положительные числа a, b, c таковы, что точка $A(1;\,2)$ расположена ниже графика параболы $y = ax^2 + bx + c$. Можно ли однозначно установить, как эта точка расположена (выше, ниже или на) по отношению к графику параболы $y = cx^2 + bx + a$? Ответ обосновать.*

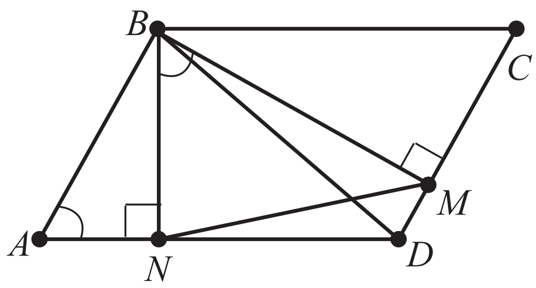
Решение: Заметим, что графики обеих парабол пересекаются в точке с абсциссой 1, поэтому любая точка с абсциссой 1 расположена одинаково по отношению к обеим параболам, значит, ответ на вопрос задачи положителен.

Ответ: Можно. Точка A расположена ниже.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример, показывающий, что точка A может лежать ниже, а что не может быть иначе — не доказано	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

10.2. *В параллелограмме $ABCD$ известны угол $\angle A = \alpha$ и диагональ $BD = d$. Пусть M и N — основания высот, опущенных из вершины B на прямые CD и AD соответственно. Найдите MN.*



К решению задачи 10.2

Решение: 1) Заметим, что верно равенство $\angle MBN = \angle BAD = \alpha$, так как стороны угла MBN перпендикулярны сторонам угла BAD.

2) Рассмотрим окружность с диаметром $BD = d$. Точки M и N лежат на этой окружности, так как $\angle BMD = \angle BND = 90^\circ$.

3) По теореме синусов для треугольника BMN имеем $\dfrac{MN}{\sin\angle MBN} = d$, откуда получаем, что $MN = d\sin\alpha$.

Ответ: $MN = d\sin\alpha$.

Примечание: Утверждение задачи и приведённое решение не зависят от того, лежат ли основания перпендикуляров на сторонах параллелограмма или их продолжениях.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в формулах или в арифметике	6 баллов
Доказаны оба факта: а) Четырёхугольник с вершинами B D M N описан; б) $\angle MBN = \alpha$, но решение не доведено до ответа	5 баллов
Доказан один из фактов а) и б) предыдущего пункта	3 балла
Верный ответ без обоснования И/ИЛИ разобраны случаи конкретных параллелограммов (например, прямоугольника)	1 балл
Рассмотрены несколько случаев расположения точек N и N на прямых, содержащих стороны CD и AD	оценивается ровно один случай
Любые утверждения и/или выкладки, не ведущие к решению	не оцениваются

10.3. *На доске написано несколько различных действительных чисел. Известно, что сумма любых трех из них рациональна, а сумма любых двух из них — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.*

Решение: Набор из трёх чисел $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}-\sqrt{3}$, как легко проверить, удовлетворяет условию задачи. Покажем, что на доске не может быть записано более трёх чисел.

Предположим противное, и пусть a_i $(i = \overline{1,4})$ — некоторые четыре числа этого набора. Тогда числа $a_1+a_2+a_3$ и $a_1+a_2+a_4$ — рациональны, поэтому рационально и число $(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2+a_4) = a_3-a_4$. Аналогично доказывается рациональность числа a_3-a_2. Тогда рационально число $(a_3-a_4)+(a_3-a_2)-(a_2+a_3+a_4) = a_3$. Точно также показывается рациональность всех чисел a_i. Но тогда сумма любых двух из них рациональна, что противоречит условию задачи.

Ответ: Три числа.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Имеется верный пример трёх чисел, а в доказательстве (в принципе верном) его оптимальности имеются неточности	5 баллов
Верное доказательство, что 4-х чисел быть не может (при отсутствии примера на 3 числа)	3 балла
В верном (в целом) доказательстве, что 4-х чисел быть не может, имеются неточности и примера на 3 числа тоже нет	2 балла
Приведён пример трёх чисел, но доказательство его оптимальности отсутствует	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Доказательство, что чисел меньше 5 (или ещё большего числа)	не оценивается

10.4. *Точку плоскости с координатами* $(x;\, y)$ *разрешено соединить отрезком с точкой, имеющими координаты* $(x+3y;\, y)$ *или с точкой, имеющей координаты* $(x;\, y-2x)$*. Можно ли при таких условиях соединить ломаной точки* $A(19;\, 47)$ *и* $B(12;\, 17)$*? Ответ обосновать.*

Решение: Очевидно, что если координаты начальной точки — числа целые, то и координаты всех последующих точек также будут целыми. Разность абсцисс точек, которые разрешено соединять отрезком, равна либо $3y$, либо 0 и в обоих случаях делится на 3. Поэтому остаток от деления на 3 абсцисс всех получаемых точек одинаков — это есть инвариант задачи. (Другим инвариантом является нечётность ординаты, но рассмотрение этого инварианта к верному ответу привести не может.) Так как 19 при делении на 3 даёт в остатке 1, а 12 — 0, точки A и B ломаной соединить не получится.

Ответ: Нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Идея рассмотрения делимости координат точек на фиксированные числа (при отсутствии решения)	2 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Отсутствие обоснование целости координат всех рассматриваемых точек	балл не понижается

10.5. *Пусть* a, b, c *и* d *— натуральные числа и* $\dfrac{ad-1}{a+1}+\dfrac{bd-1}{b+1}+\dfrac{cd-1}{c+1}=d$*. Найдите все значения, которые может принимать число* d*.*

Решение: Преобразуем уравнение равносильным образом:

$$\frac{ad-1}{a+1}+\frac{bd-1}{b+1}+\frac{cd-1}{c+1}=d$$

$$d-\frac{d+1}{a+1}+d-\frac{d+1}{b+1}+d-\frac{d+1}{c+1}=d$$

$$2d=(d+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

$$\frac{2d}{d+1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

$$2-\frac{2}{d+1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{2}{d+1}=2.$$

Так как все переменные — суть натуральные числа, каждая из трёх первых дробей левой части не превосходит $1/2$. Поэтому для выполнения равенства необходимо условие $\frac{2}{d+1}\geqslant 2-3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, откуда $d\leqslant 3$, то есть $d\in\{1,\ 2,\ 3\}$. Покажем, что все такие значения d может принимать.

$d=3$ достигается при $a=b=c=1$. (Других вариантов нет, что доказать несложно, но не требуется.)

$d=2$ достигается, например, при $a=b=1$ и $c=2$. (Есть ещё две тройки, получающиеся из приведённой перестановкой значений неизвестных.)

$d=1$ возникает в нескольких случаях. Например, при $c=6$, $b=2$, $a=1$ или при $b=c=3$, $a=1$. А всего таких случаев 10.

Ответ: $d\in\{1,\ 2,\ 3\}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что $d\leqslant 3$, но не обосновано, что все значения из множества $\{1,\ 2,\ 3\}$ возможны	3–5 баллов в зависимости от количества обоснованных значений
Обоснованно найдены все допустимые значения для d, но не доказано, что нет других	3 балла
Обоснованно найдены некоторые (не все) допустимые значения для d	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Доказательства того, что $d\leqslant 3$ нет, но есть существенные продвижения в этом направлении	+1 балл

10.6. *На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.*

Решение: По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет в «Контакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется $217 - 17n$ списков. $217 - 17n \geqslant 0$, поэтому $n \leqslant 12$ (мы помним, что n — число натуральное). Тогда осталось не менее $217 - 12 \cdot 17 = 13$ списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов-блондинок.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения)	4 балла
Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков	1 балл
Любые идеи, не ведущие к доказательству	не оцениваются