11-й класс

11.1 Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то $\cos 2x = f(\sin x)$, где $f(x) = 1 - 2x^2$. Заметив это, одиннадцатиклассник Вася пытается найти функцию g(x), для которой $\cos 3x = g(\sin x)$ при всех значениях x. Удастся ли ему это сделать?

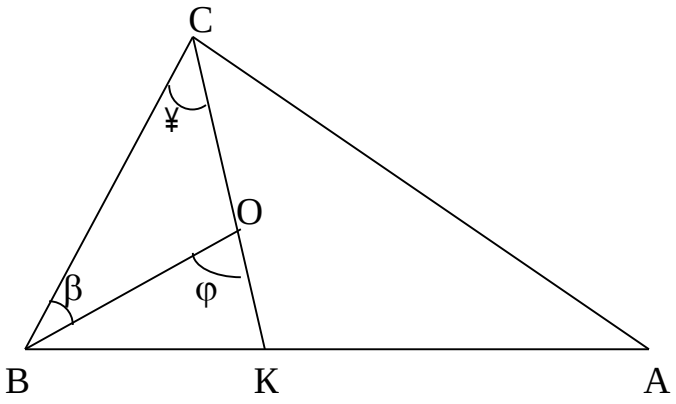
Решение: Если бы оказалось, что $\cos 3x = g(\sin x)$ тождественно, то при $x=0$ получилось бы $1=g(0)$, а при $x = \pi$ получилось бы $-1=g(0)$. Следовательно, такой функции нет.

Ответ: Такой функции не существует

11.2 CK – биссектриса угла C треугольника ABC (точка K лежит на стороне AB). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, находится вне круга, для которого отрезок BK является диаметром.

Решение: O – центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис. Угол BOK –- внешний для треугольника BOC, поэтому $\varphi=\beta+\gamma$. Но $\beta = \frac{1}{2}\angle B, \quad \gamma = \frac{1}{2}\angle C$, так что

$\beta + \gamma = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) < \frac{1}{2}\cdot 180^0 = 90^0$. Таким образом, $\varphi<90^0$. Это означает,



что точка О лежит вне круга с диаметром ВК. (Напомним, что точки Р, не лежащие на прямой ВК, классифицируются следующим образом: точки, из которых отрезок ВК виден под тупым углом, – это в точности точки, лежащие внутри круга с диаметром ВК; точки, из которых отрезок ВК виден под прямым углом, – это точки, лежащие на границе этого круга; точки, из которых отрезок ВК виден под острым углом, – это точки, лежащие вне этого круга).

11.3 Даны 100 чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$, отличных от нуля. Рассматриваются всевозможные попарные произведения $a_i \cdot a_j$, $1 \le i < j \le 100$. Докажите, что среди этих произведений более 49% положительных.

Решение: Число всевозможных попарных произведений $a_i a_j$, $1 \le i < j \le 100$, равно $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. Сколько среди них отрицательных? Пусть k – количество отрицательных чисел среди $a_1, a_2, ..., a_{100}$, тогда $100 - k$ – количество положительных чисел среди них. Отрицательное произведение двух чисел получается, только если перемножаются отрицательное и положительное числа. Умножаем каждое отрицательное на каждое положительное. Это даем нам общее количество отрицательных попарных произведений: $k(100-k)$. Стало быть, общее количество положительных попарных произведений равно $4950 - k(100-k)$. Преобразуем:

$$4950 - k(100-k) = 4950 + k^2 - 100k = 4950 + (k-50)^2 - 2500 =$$

$$= 2450 + (k-50)^2 \ge 2450$$

(с равенством при $k = 50$). Значит, доля положительных произведений среди всех произведений не меньше $\frac{2450}{4950} \cdot 100\% = 49,...\%$.

Замечание. 1) Число положительных произведений можно посчитать иначе, умножая отрицательные числа на отрицательные, а положительные – на положительные. 2) Неверно, что положительные произведения всегда составляют не меньше половины от общего числа.

11.4 Для заданного натурального числа $a > 1$ найдите все такие натуральные числа b, для которых число $ab - 1$ делится на число $a^2 - 1$.

Решение: Пусть число b таково, что $ab - 1$ делится на $a^2 - 1$. Тогда и $a(ab-1)$ делится на $a^2 - 1$. Таким образом $a^2 b - a = a^2 b - b + b - a = (a^2 - 1)b + (b - a)$ делится на $a^2 - 1$. Следовательно, $b - a$ делится на $a^2 - 1$, т.е. $b - a = (a^2 - 1)t$, где t – некоторое натуральное число, т.е.

$$b = (a^2 - 1)t + a. \qquad (1)$$

Обратно, если b имеет вид (1) с некоторым (любым) натуральным t, то $ab - 1 = a(a^2 - 1)t + a^2 - 1 = (a^2 - 1)(at + 1)$ – число, которое делится на $a^2 - 1$.

Ответ: $b = (a^2 - 1)t + a$, где t – произвольное натуральное число.

11.5 125 студентов пришли в большую аудиторию. Каждый из студентов знаком ровно с десятью другими. Некоторые из студентов покинули аудиторию во время перерыва. Затем выяснилось, что все оставшиеся студенты знакомы с одинаковым числом людей, оставшихся в аудитории. Докажите, что среди студентов, которые ушли, были знакомые друг с другом.

Решение: Первоначально имеем граф с 125 вершинами, причем степень каждой вершины равна 10. Поэтому число всех ребер графа равно $\frac{10 \cdot 125}{2} = 625$. Предположим, что удалось найти m вершин, никакие две из которых не соединены ребром, и при удалении которых вместе с ребрами, из них выходящими, остается граф с $125 - m$ вершинами, каждая из которых имеет одну и ту же степень d. В этом новом графе число ребер равно $\frac{(125 - m)d}{2}$, и оно на $10m$ меньше числа ребер исходного графа (т.к.с каждой удаленной вершиной «исчезают» 10 ребер, выходящих из этой вершины, и все «исчезающие» ребра различны). Таким образом,

$625 - 10m = \frac{(125 - m)d}{2}$,

$125(10 - d) = m(20 - d)$, где $0 \le d < 10$, так как $20 - d \le 20$, то число $20 - d$ делится самое большее на первую степень числа 5, поэтому m делится на 25: $m = 25\mu$. Тогда $5(10 - d) = \mu(20 - d)$, $\mu < 5$.

Значит, число $20 - d$ делится на 5, т.е. либо $d = 0$, либо $d = 5$, т.е. либо $50 = 20\mu$, либо $25 = \mu \cdot 15$, что невозможно при целых значениях μ.

Отсюда вытекает утверждение задачи.