Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015 – 2016 учебном году 11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *Приведённый квадратный трёхчлен $y = x^2 + ax + b$ имеет корнями действительные числа t и s причём $-1 < t < 0$. Докажите, что если прибавить к коэффициентам a и b корень t, то полученный трёхчлен также будет иметь два различных действительных корня.*

Решение: По теореме Виета $b = t \cdot s$, $a = -t - s$. Тогда полученный трёхчлен имеет вид $g(x) = x^2 + (a+t)x + (b+t) = x^2 - sx + st + t$. Его дискриминант равен $D = s^2 - 4st - 4t = (s - 2t)^2 - 4t(1 + t) \geqslant -4t(1 + t)$. Так как $-1 < t < 0$, то $-4t(1+t) > 0$, значит дискриминант нового квадратного трёхчлена положителен, что доказывает утверждение задачи.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно выписан дискриминант нового трёхчлена (через две переменные), но не доказана его положительность	4 балла
Указана связь между числами a, b, t и s (теорема Виета или формулы корней)	1 балл
Утверждение проиллюстрировано на примерах	0 баллов
Любые выкладки, не ведущие к доказательству	не оцениваются

11.2. *Пусть α, β и γ — плоские углы трёхгранного угла. Докажите, что числа $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\dfrac{\beta}{2}$ и $\sin\dfrac{\gamma}{2}$ являются длинами сторон некоторого треугольника.*

Решение: Пусть вершина угла — точка O. Отложим на всех рёбрах данного трёхгранного угла равные отрезки $OA = OB = OC = 1/2$ и рассмотрим тетраэдр $OABC$. Из треугольников, образующих его боковые грани, легко (например, по теореме косинусов) находятся отрезки AB, AC и BC. Эти отрезки оказываются равными $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\dfrac{\beta}{2}$ и $\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Из них составлен треугольник ABC. Утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
В принципиально верном доказательстве имеются арифметические или тригонометрические погрешности	6 баллов
Имеется идея (не реализованная) получить треугольник с длинами сторон, пропорциональными синусам половинных углов	2 балла
Утверждение проиллюстрировано на примерах	0 баллов
Любые рассуждения, не ведущие к решению	не оцениваются

11.3. *Все* 100 *натуральных чисел от* 2 *до* 101 *разбили на две группы по* 50 *чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.*

Решение: Заметим, что в результате описанного действия всегда получится натуральное число, большее 101. Возможны два случая.

1) В каждой группе есть чётное число. Тогда произведение чисел в каждой из групп чётна, как и сумма этих произведений. Чётное число, большее 2 — составное, утверждение в этом случае доказано.

2) Все чётные числа попали в одну группу. Тогда (так как в наборе чётных чисел ровно 50) одна из групп содержит все чётные числа, вторая — все нечётные. В каждой группе, следовательно есть числа, кратные 3 (можно аналогично рассуждать с делимостью на 5, 7, и т. д.); тогда каждое из произведений, также как и их сумма тоже делится на 3. Натуральное число, большее 3 и делящееся на 3 — составное. Утверждение доказано и в этом случае тоже.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
В приведённом доказательстве не рассмотрен принципиально важный случай	3 балла
Утверждение проиллюстрировано на примерах	0 баллов

11.4. *Решите уравнение* $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$.

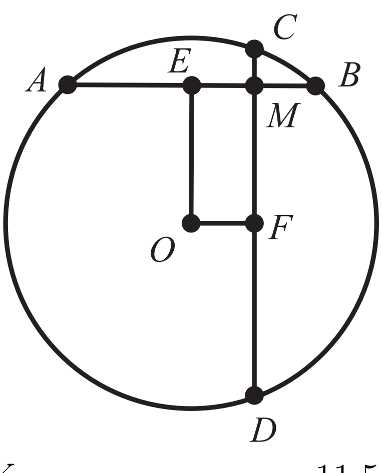
Решение: Область допустимых значений уравнения определяется двумя условиями: $xy \geqslant 0$ и $x + y \geqslant 0$. Из первого условия следует, что либо среди чисел x и y есть число 0, либо эти два числа одного знака. Из второго условия видно, что случай, когда они оба отрицательны, невозможен; также невозможен случай, когда одно из чисел отрицательно, а второе равно нулю. Значит $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда $3^{-x} \leqslant 3^0 = 1$, $4^{-y} \leqslant 4^0 = 1$, и $3^{-x} + 4^{-y} \leqslant 2$, причём равенство достигается только при $x = y = 0$. С другой стороны, $xy \geqslant 0$, поэтому $2^{\sqrt{xy}} \geqslant 2^0 = 1$. Также $5^{\sqrt{x+y}} \geqslant 5^0 = 1$, значит, $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geqslant 2$. Таким образом, левая часть данного уравнения не меньше двух, а правая — не больше двух. Тогда они обе равны 2, что достигается при $x = y = 0$, и только при таком условии.

Ответ: (0; 0).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но какие-то из неравенств, либо а), либо б) либо ОДЗ, ошибочно записаны, как строгие; с учётом этого сделан вывод об отсутствии решений неравенства	6 баллов
Доказаны два неравенства а) $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geqslant 2$ и б) $3^{-x} + 4^{-y} \leqslant 2$, но при этом либо сделан неверный вывод, что неравенство решений не имеет, либо не обосновано, что равенство достигается в единственном случае $x = y = 0$	5 баллов
Доказано одно из двух неравенств а) или б) предыдущего пункта	3 балла
Верно найдена только ОДЗ уравнения	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Любые выкладки, не ведущие к решению	не оцениваются

11.5. *Через точку M внутри круга радиуса r с центром в точке O провели две перпендикулярные хорды. Известно, что сумма квадратов длин этих хорд равна m^2. Найдите длину отрезка OM.*



К решению задачи 11.5

Решение: Обозначим проведённые хорды как AB и CD и опустим на них перпендикуляры OE и OF соответственно (см. рисунок). Четырёхугольник $OEMF$ является прямоугольником, поэтому выполняется равенство $OM = \sqrt{OE^2 + OF^2}$. Точка E — середина хорды AB и из треугольника AOE по теореме Пифагора $AB = 2AE = 2\sqrt{r^2 - OE^2}$. Отсюда $OE^2 = r^2 - 0{,}25AB^2$. Аналогично получаем $OF^2 = r^2 - 0{,}25CD^2$, значит,

$$OM = \sqrt{OE^2 + OF^2} =$$
$$= \sqrt{r^2 - 0{,}25AB^2 + r^2 - 0{,}25CD^2} = \sqrt{2r^2 - 0{,}25m^2}.$$

Задача решена.

Ответ: $OM = \sqrt{2r^2 - 0{,}25m^2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но получен неверный ответ только из-за арифметических ошибок	6 баллов
Условие задачи верно записано в алгебраической форме (через векторы, координаты, тригонометрические функции и т. п.), но получившаяся алгебраическая задача не решена	3 балла
Рассмотрен только частный случай, когда хотя бы одна из хорд является диаметром	2 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл

11.6. *На заводе работают ровно* 217 *женщин, среди которых* 17 *брюнеток, а остальные* 200 — *блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно* 200 *женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере* 13 *блондинок.*

Решение: По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет в «Контакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется $217 - 17n$ списков. $217 - 17n \geqslant 0$, поэтому $n \leqslant 12$ (мы помним, что n — число натуральное). Тогда осталось не менее $217 - 12 \cdot 17 = 13$ списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов-блондинок.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения)	4 балла
Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков	1 балл
Любые идеи, не ведущие к доказательству	не оцениваются